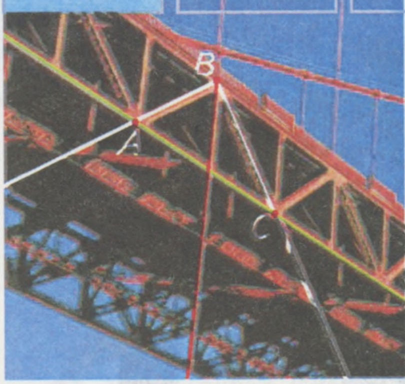
H. P. Bevz, V. H. Bevz, N. H. Vladimirova

MÉRTAN



Tankönyv
az általános oktatási
rendszerű tanintézetek
7. osztálya számára

Ajánlotta
Ukrajna Oktatási és
Tudományos
Minisztériuma

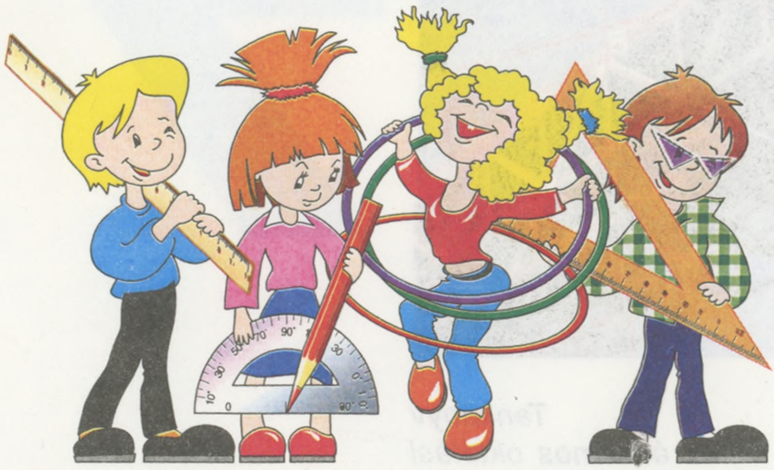
ЛЬВІВ
СВІТ
2007

ББК 22.1я72
Б36

Перекладено з видання:
Бевз Г. П. та ін. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2007.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(рішення колегії від 12. 04. 2007 р. № 5/1-19)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено



Бевз Г. П. та ін.

Б36 Геометрія: Підручник для 7 кл. загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. Переклад угорською мовою: Ю. І. Кулін, О. П. Генці, А. А. Варга. – Львів: Світ, 2007. – 208 с.: іл.

ISBN 978-966-603-532-6.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-603-532-6 (угор.)
ISBN 966-7091-60-0 (укр.)

Ifjú barátaink!

Legyetek üdvözölve a mértan világában. Csodálatos világba érkeztetek, ahol minden tökéletes, minden szorosan kapcsolódik a munka, a szellem, a művészet világához.

A mértan vagy másként *geometria* a földmérés tudományaként jött létre. Az ógörög *geo* azt jelenti: „föld", a *metreo* jelentése: „mérek". Az egyiptomi és görög földmérők már háromezer évvel ezelőtt tudták mérni a távolságot, a szöget, képesek voltak a földrészlegek területének meghatározására. Ezeket az ismereteket felhasználták az építőmesterek, a hajósok, a csillagászok, a hadvezérek és a művészek.

A mértant nem csak a mérnököknek, építészeknek, konstruktőröknek, művészeknek, műszaki rajzolóknak, hanem az esztergályosoknak, asztalosoknak, lakatosoknak, szabóknak is tudniuk kell. Mértani ismeretek nélkül nem boldogulhattok ti sem a felső tagozatos osztályokban, még kevésbé a főiskolán, egyetemen.

Egyes mértani ismereteket már az előző osztályokban megszereztetek. Ennek köszönhetően tudjátok, mi a szakasz, a szög, a háromszög, a sokszög, a kör, ki tudjátok számítani egyes mértani alakzatok területét, térfogatát.

Most elkezditek a *mértan tantárgy rendszeres* tanulását. Általa elmélyíthetitek mértani ismereteiteket, fejleszthetitek a logikai gondolkodásotokat és térérzéketeket. A mértan tanulásában ez a tankönyv lesz segítségetekre.

A könyv minden paragrafusában elméleti ismereteket és feladatokat találtok. Az elméleti tananyag olvasásakor fordítsatok különös figyelmet a *dőlt* és **félkövér** betűkkel nyomtatott szavakra.

Dőlt betűkkel a mértani szakkifejezések, fogalmak vannak kiemelve. Meg kell tanulnotok megmagyarázni és megfelelő példákkal alátámasztani a tartalmukat. **Félkövér** betűkkel a fontos mértani állítások, tételek vannak jelölve. Ezeket meg kell értenetek, tudnotok kell bizonyítani és a feladatok megoldása során alkalmazni őket. A tételek bizonyításának befejezését □ jelzi.

A tankönyv minden paragrafusában fellelhető a Érdeklődőknek rovat. Ebben kiegészítő tan- és ismeretanyagot találtok, amely felkeltheti a mértan tudománya iránti érdeklődéseteket.

Azt, hogy mennyire sajátítottátok el az új elméleti tananyagot, a minden paragrafusban megtalálható és a részek után ismétlődő ***Ellenőrző kérdések és feladatok*** rubrika kérdéseinek megválaszolásával, feladatainak megoldásával mérhetitek fel.

A mértan nem sajátítható el a feladatok megoldásának megtanulása nélkül. A feladatmegoldások különböző módszereivel az ***Oldjuk meg közösen!*** rovat ismertet meg benneteket. Azt tanácsoljuk, hogy a házi feladat elkészítése előtt oldjátok meg a rovat feladatait. Az otthoni megoldásra ajánlott feladatok száma ■ téglalappal van jelölve.

A tankönyv példái és gyakorlati feladatai négy csoportba vannak sorolva: ***Oldjátok meg fejben!***, A csoport, B csoport és ***Ismétlő feladatok***. Egyes feladatokban félkövér betűkkel vannak kiemelve a fontos állítások, ezeket érdemes lesz megjegyeznetek.

Az elsajátított tananyag összefoglalása és rendszerezése céljából figyelmesen tanulmányozzátok ***A fejezet összefoglalása*** című rovatban foglaltakat.

A tematikus értékelésre való alapos felkészülésben nagy segítségetekre lesz az ***Önálló munka***, a ***Tesztfeladatok*** és az ***Ellenőrző dolgozat típusfeladatai*** rubrikák feladatainak megoldása.

A tankönyv egyes részeiben ***Rajzos feladatok*** találhatók (mint pl. a 26. oldalon). Az ilyen feladatok feltételei a rajzok segítségével és a vízszintes vonalak fölött olvasható rövid megjegyzések által vannak megadva. A vonalak alatt a kiszámítandó mennyiségek vannak feltüntetve. E feladatok némelyike fejben is megoldható.

A tankönyv végén válogatás található ***Összetettebb, nehezebb feladatok*** címmel. Ezek megoldása a matematikát kedvelő, ügyes tanulóknak ajánlható.

A mértan változatos világában mindegyiketek megtalálhatja a kedvére való ismereteket, példákat.

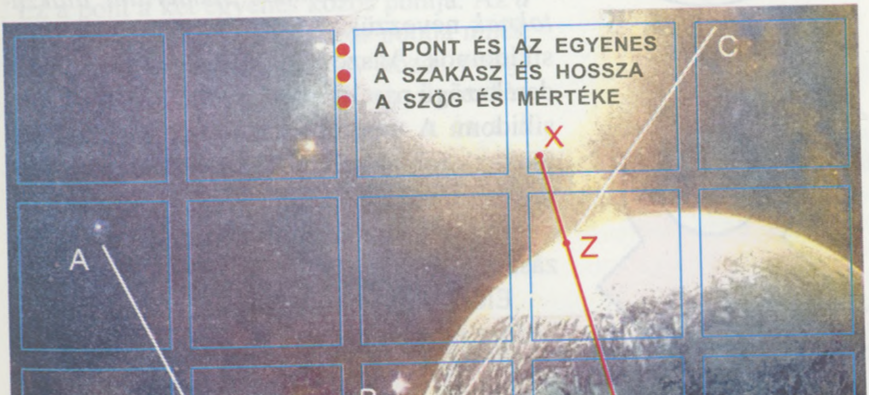
Sok sikert kívánunk a tanuláshoz!

A szerzők

fejezet **1.**

A LEGEGYSZERŰBB MÉRTANI ALAKZATOK ÉS TULAJDONSÁGAIK

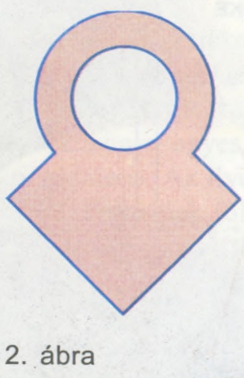
Ebben a fejezetben megismétlitek és kibővítitek ismereteiteket a legegyszerűbb mértani alakzatokról: a ***pontról***, az ***egyenesről***, a ***félegyenesről***, a ***szakaszról*** és a ***szögről***. Megtudjátok hogyan kell megmérni a szakasz hosszát, megismerkedtek a szögméréssel, a szerkesztéshez és a méréshez legszükségesebb eszközökkel.



1. §. *A pont és az egyenes*

A mértan a mértani alakzatokkal és azok tulajdonságaival foglalkozó tudomány. A legegyszerűbb mértani alakzat a *pont*. Minden más mértani alakzat pontokból áll. Például a *körvonal* a sík egy adott pontjától azonos távolságra lévő pontjainak mértani helye, halmaza (1. ábra). A *szakasz* is pontokból áll. Bármely *mértani alakzat pontok halmaza.* Valamely mértani alakzat része, vagy több mértani alakzat egyesítése, uniója szintén mértani alakzat (2. ábra).

1. ábra



2. ábra

Az egyik mértani alakzat a *sík*. A sík részét ábrázolhatjuk az asztallappal, a falfelülettel esetleg a padlóval. A mértanban a síkot végtelennek, ideálisan egyenesnek és vékonynak fogadjuk el.

Azokat az alakzatokat melyek egy síkhoz tartoznak *síkidomoknak, síkmértani alakzatoknak* nevezzük. Az eddigi alakzatok mind síkidomok. Viszont a kocka, a gömb és a derékszögű paralelepipedon (3. ábra) már nem síkidom. A mértan azon részét mely síkidomokkal foglakozik *planimetriának*, *síkmértannak* nevezzük (a latin *planum*, sík szóból).

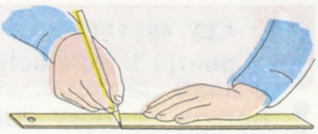
Ezzel elkezdjük síkmértan tanulmányozását.

Először is tekintsük át, hogyan helyezkedhet el a pont és az egyenes a síkon.

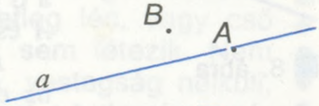
3. ábra

Már tudjátok, hogyan kell vonalzóval egyenest húzni (4. ábra).

Az egyenes végtelenül hosszú és ideálisan egyenes. Mint minden síkidom az egyenes is pontok halmaza. Ha az A pont hozzátartozik az a egyeneshez azt mondjuk, hogy az a egyenes átmegy az A ponton. Így jelöljük: $A \in a$. Ha a B pont nem tartozik hozzá az a egyeneshez akkor így jelöljük: $B \notin a$ (5. ábra).



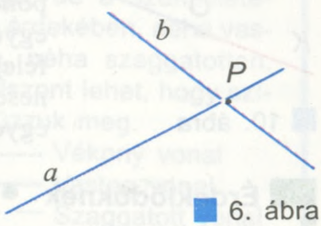
4. ábra



5. ábra

> ! **Bármilyen legyen is az egyenes, mindig léteznek olyan pontok, melyek hozzátartoznak az egyeneshez és léteznek olyan pontok, melyek nem tartoznak hozzá az adott egyeneshez.**

Egy ponton keresztül végtelen sok egyenes húzható. A 6. ábrán a P ponton keresztül két egyenest, egy a és egy b egyenest húztak. Ez a pont a két egyenes közös pontja. Az a és a b egyenesnek több közös pontja nincs. Ha két egyenesnek csak egy közös pontja van, akkor a két egyenes ebben *a pontban metszi* egymást. Az P pont az a és a b egyenes metszéspontja.

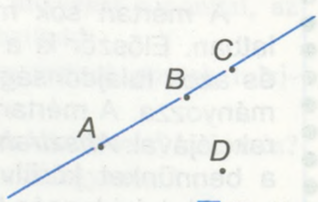


6. ábra

Ha az A és B pont egy egyeneshez tartozik, akkor ez az egyenes átmegy az A és B pontokon. Ebben az esetben az egyenest AB-vel jelöljük.

> ! **Két különböző ponton keresztül csak egy egyenes húzható.**

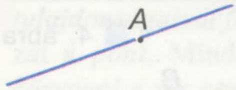
Lehet-e három ponton keresztül egy egyenest húzni? Nem mindig. Ha az A, B és C pontok úgy helyezkednek el, mint ahogy az a 7. ábrán látható, akkor igen. De az A, B és D pontokon keresztül már nem. Azt mondjuk az A, B és D pontok nem tartoznak egy egyeneshez, az A, B és C pontok viszont *egy egyenesen* vannak, és a B pont az A és C pontok közzé esik.



7. ábra

! Egy egyenes három pontja közül egy mindig a másik két pontja között helyezkedik el.

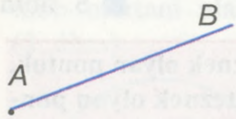
Ha a B pont az A és a C pont között helyezkedik el, akkor úgy fogalmazunk, hogy az A és a C pont a B pont különböző oldalain van, és az A és a B pont a C pont egy oldalán.



8. ábra

A felkiáltó jellel kiemelt mondatok *a pont és az egyenes és a pontok kölcsönös helyzetének főbb tulajdonságait mondják ki.*

Az egyenest bármelyik pontja két részre osztja (8. ábra). Ezeket a részeket az A pontból kiinduló *félegyenesnek* (sugárnak) nevezzük. Az A pontot a *félegyenes kezdőpontjának* nevezzük. Az AB félegyenes azt jelenti, hogy a félegyenes kezdőpontja az A pont (9. ábra).



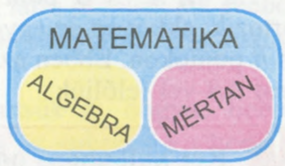
9. ábra

Két félegyenest, melyeknek közös a kezdőpontja és egy egyenest alkotnak *kiegészítő* félegyeneseknek nevezzük. A 10. ábrán az OK félegyenes az OP félegyenes kiegészítő félegyenese és fordítva, az OP félegyenes az OK félegyenes kiegészítő félegyenese.

10. ábra

Érdeklődőknek

A mértan a matematika egyik része (11. ábra). A mértan mind tartalmilag, mind módszertanilag gazdag tudomány. Része az elemi mértan, a felsőbb mértan, a nemeuklideszi mértan, a topológia és még sok más terület is. Az iskolában csak az *elemi mértannal* foglalkozunk.

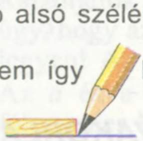
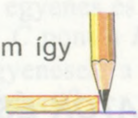


11. ábra

A mértan sok más tudománnyal áll szoros kapcsolatban. Először is a fizikával. A fizika az anyagi testeket és azok tulajdonságait (tömeg, hőmérséklet, szín) tanulmányozza. A mértanban pedig ezen anyagi testek absztrakciójával. *Absztrahálni* annyit jelent, mint elvonatkoztatni a bennünket körülvevő konkrét tárgyaktól, a leglényegesebb tulajdonság kiemelésével. A tű hegye, a kifeszített húr mind anyagi tárgy, melyeknek hosszuk, tömegük, vastagságuk van. Ezeket a tárgyakat absztrahálva, hozta létre az ember a pont és az egyenes fogalmát. Ezek a fogalmak a természetben nem léteznek, csak az emberi képzeletben. Viszont nagyon hasznosak, mert az egyenes és részeinek a mértanban tárgyalt tulajdonságai átvihetők millió és milliárd kifeszített húr, esetleg léc, vagy cső vizsgálatára. A természetben a sík sem létezik. Nem létezik ideálisan sima és egyenletes, vastagság nélküli, minden irányba végtelen felület. Viszont a tudomány számára nagyon fontos ez a fogalom, mert a mértanban vizsgált tulajdonságai alkalmazhatóak milliárd ablaküveg, fal és más olyan tárgy vizsgálatakor melyek rendelkeznek síkfelületekkel.

Rajzoljatok szépen, precízen

Szakaszt úgy húzunk, hogy a ceruzát nem érintjük a vonalzó alsó széléhez.

Nem így  hanem így 

A mértani szakasznak nincs vastagsága, de a szemléletesebb rajz érdekében, néha vastagabban, néha szaggatottan, máskor viszont lehet, hogy színessel húzzuk meg.

——— Vékony vonal

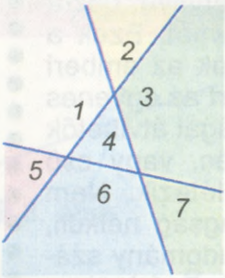
——— Vastag vonal

— — — Szaggatott vonal

? Ellenőrző kérdések és feladatok

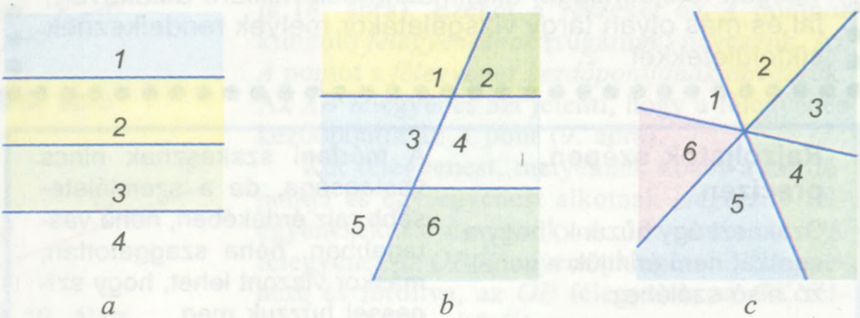
1. Mit tanulmányoz a mértan? Mit tanulmányoz a síkmértan?
2. Hozzatok fel példát síkmértani alakzatra és nem síkmértanira!
3. Mit jelent az $A \in a$ és a $B \notin b$ jelölés?
4. Hogyan értelmezitek a *pont*, az *egyenes* és a *sík* fogalmát?
5. Nevezzetek meg, olyan tárgyakat, melyeket a ponttal, az egyenessel vagy a síkkal modellezhetünk!
6. Fogalmazzátok meg az egyeneshez tartozó pontok tulajdonságát!
7. Mit jelent a „*B* pont az *A* és *C* pontok között van" kifejezés?
8. Mi a félegyenes? Hogyan jelöljük a félegyenest?
9. Melyek a kiegészítő félegyenesek?

Oldjuk meg közösen!



12. ábra

Hány részre osztja a síkot három egyenes?
Ha az egyenesek a síkon úgy helyezkednek el, mint ahogy azt a 12. ábra mutatja, akkor 7 részre. Ha viszont úgy, ahogy a 13. ábrán látható, akkor vagy 4 vagy 6 részre.
Felelet. A síkhoz tartozó három különböző egyenes 4, 6 vagy 7 részre osztják azt.

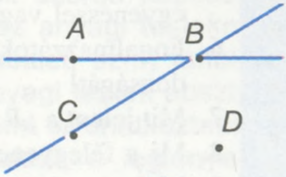


13. ábra

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

1. Bármely két ponton keresztül húzható egyenes? Létezik-e két olyan pont, melyen keresztül húzható egyenes?
2. Bármely három ponton keresztül húzható egyenes? Létezik-e három olyan pont, melyen keresztül húzható egyenes?
3. Hány félegyenesre osztja az egyenest egy pont?
4. Írd le, hogyan helyezkednek el egymáshoz viszonyítva a 14. ábrán látható egyenesek és pontok!
5. Hány részre osztja az egyenest egyik pontja? És két pontja?
6. Kiegészítő félegyenesek-e a PK és KP félegyenesek (10. ábra)? És az OP és KP félegyenesek? Miért?



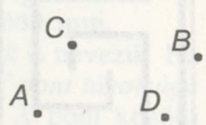
14. ábra

A

7. Vegyetek fel a füzetben egy A és egy B pontot! Húzzatok rajtuk keresztül egyenest! Nevezzétek meg a kapott egyenest!
8. Húzzatok egy egyenest! Vegyetek fel néhány olyan pontot, melyek hozzátartoznak az egyeneshez, és néhány olyan pontot melyek nem tartoznak hozzá az egyeneshez!
9. Vegyetek fel egy A pontot! Húzzatok rajta keresztül 3 egyenest! Lehet-e tíz egyenest húzni az A ponton keresztül? És egymilliót? Miért?
10. Készítsetek rajzot, ha az $A \in a$ és $B \notin a$!
11. A k és a p egyenes metszi egymást egy X pontban. Készítsetek rajzot! Igaz-e, hogy $X \in k$ és $X \in p$?
12. Az AB egyenes az AC egyenest az A pontban, a BC-t a B pontban metszi. Hozzátartozik-e a C pont az AB egyeneshez?
13. Jelöljétek ki a K, P és T pontokat úgy, hogy egy egyenest lehessen húzni rajtuk keresztül! Hányféleképpen tudjátok megnevezni az egyenest!
14. Jelöljetek ki három A, B és C pontot egy egyenesen úgy, hogy az A és a B pont a C ponttól egy oldalra essen, az A és C pont pedig egy oldalra a B ponttól!
15. Rajzoljatok egy a egyenest! Jelöljétek ki az A, B és C pontokat úgy, hogy az AB egyenes és az a egyenes metszéspontja a C pont legyen! Az A és C pont a B ponttól egy oldalra essenek!
16. Az a és a b egyenesek a P pontban metszik egymást. Hány félegyenes keletkezett?
17. Hány részre osztja a síkot egyik egyenese? Két egyenese? Ábrázoljátok a lehetséges helyzeteket!

B

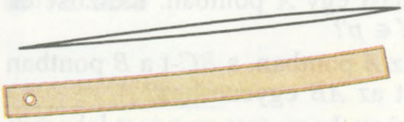
18. Vegyétek fel az A, B, C és D pontokat úgy, hogy az AB és CD egyenesek metsszék egymást, az AB és CD félegyenesek pedig nem!
19. Létezik-e az A, B, C és D pontok olyan elrendezése, hogy az AB és CD félegyenesek metsszék egymást, az AC és BD félegyenesek pedig nem!
20. Rajzoljatok AB, BC és AC félegyenest! Hány részre bontották ezek a félegyenesek a síkot?
21*. Vegyetek fel négy pontot úgy, hogy semelyik három pont ne tartozzék egy egyeneshez (15. ábra). Hány egyenest határoz meg a négy pont? Hány részre osztják a síkot ezek az egyenesek?



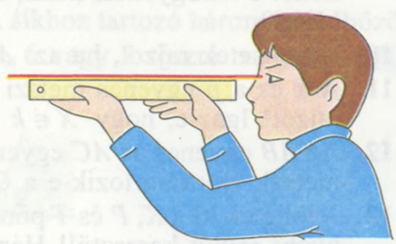
15. ábra

22. Az egyik tanuló a füzetében felvett két ponton keresztül először a vonalzója egyik oldalát oda téve húzott egy egyenest, majd a mások oldala mentén. Két vonalat kapott melyek két pontban metszik egymást (16. ábra). Mit mondhatunk el a tanuló vonalzójáról? Miért?

23. A vonalzó leellenőrzéséhez, tegyük az élét a szemünk elé (17. ábra). Mit veszünk észre, ha a vonalzó görbe?



16. ábra



17. ábra

GYAKORLATI FELADAT

24. Mutasd meg, hogyan lehet papírlapból hajtogatással vonalzót készíteni!

ISMÉTLŐ FELADATOK

25. Nevezzétek meg és ábrázoljátok az eddig tanult síkmértani alakzatokat!

26. Rajzoljatok egy 4 cm hosszúságú szakaszt és egy tőle kétszer hosszabbat!

27. Rajzoljatok hegyes-, tompa-, derék- és egyenesszöget! Színezzétek ki a belső szögtartományt!

28. Mekkora annak a háromszögnek a kerülete, melynek oldalai 5 cm, 7 cm és 8,5 cm hosszúak?

29. A négyzet kerülete 6 cm-rel hosszabb az egyik oldal hosszánál. Mekkora a kerület?

30. Rajzoljátok át a füzetbe a 18. ábrán látható ógörög díszítőmintát. Készítsetek kétszer hosszabb sávot!

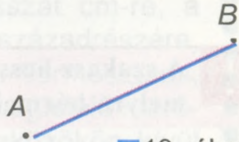
18. ábra

2. §. *A szakasz és hosszúsága*

Az egyenest két pontja három részre bontja: két félegyenesre és egy szakaszra.

Az *AB szakasznak* nevezzük az egyenesnek azt a részét, amely az *A* és *B* pontot, valamint a köztük lévő összes pontot tartalmazza.

Az *A* és *B* pontokat az *AB* szakasz *végpontjának* nevezzük, az összes többit *belső pontnak*.



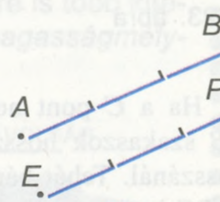
19. ábra

A 19. ábrán az *AB* szakasz látható. Az *A* és a *B* pont a végpont, a köztük lévő bármelyik pont pedig belső pont.

20. ábra

Két szakasz *metszi* egymást, ha egy közös pontjuk van.

A szakasz méréséhez *egységnyi szakaszra* van szükségünk (mértékegységre). A 20. ábrán egy egységnyi szakasz látható, melynek hossza 1 cm.



21. ábra

Ha az *AB* szakaszra az egységnyi szakasz pontosan 3-szor mérhető fel, akkor az *AB* szakasz hossza 3 cm (21. ábra). Ha az *EP* szakaszra az egyégnyi szakasz 2-szer mérhető fel és a maradékra az egységnyi szakasz tizede még 7-szer, akkor az *EP* szakasz hossza 2,7 cm. Így írjuk: $AB = 3$ cm, $EP = 2{,}7$ cm.

Egységnyi szakasznak választhatjuk az 1 m-t, az 1 km-t, az 1 lábat, az 1 hüvelyket, az 1 araszt.

> ! **Minden szakaszhoz tartozik egy egyértelműen meghatározott mérőszám, a szakasz hossza.**

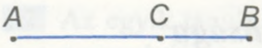
Két szakasz *egyenlő*, ha hosszuk egyenlő.

Két szakasz közül az a *nagyobb*, amelyik hosszabb.

Centiméterben mérjük a rövidebb szakaszok hosszát. A nagyobb szakaszok hosszát deciméterben, méterben, esetleg kilométerben, a nagyon kis szakaszokét pedig milliméterben adják meg.

1 km = 1000 m, 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

A szakasz hosszát a végpontjai közötti *távolságnak* is nevezik. Ha az $XY = 18$ cm, akkor ez azt jelenti, hogy az *X* és az *Y pont távolsága* 18 cm. Az *X* és *Y* pont távolsága egyenlő az *Y* és *X* pont közötti távolsággal.



22. ábra

Ha a C pont az AB szakaszt két olyan részre osztja, melyek hossza, például 2 cm és 1,2 cm, akkor az AB szakasz hossza 3,2 cm (22. ábra).

! A szakasz hossza egyenlő azon részek hosszainak összegével, melyre bármelyik belső pontja osztja.

23. ábra

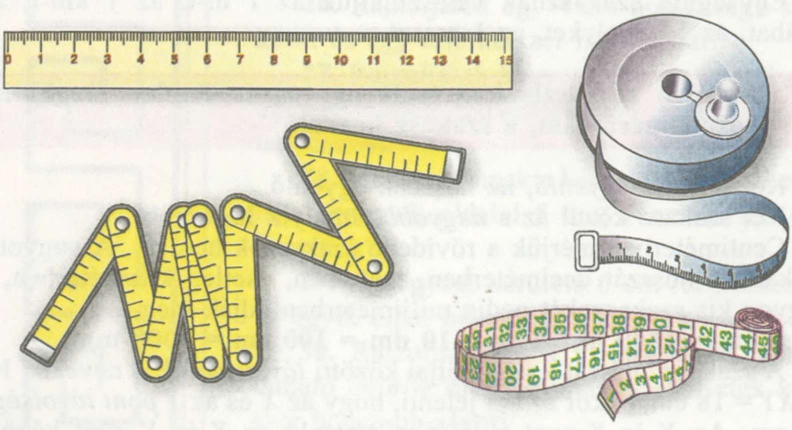
A fentebb kijelölt szabály a *szakasz mérésének alaptulajdonsága*, axiómája.

A szakasz *felezőpontjának* nevezzük azt a belső pontját, mely két egyenlő hosszúságú részre osztja a szakaszt.

Ha a C pont az AB szakasz felezőpontja, akkor $AC = CB$ (23. ábra).

Ha a C pont nem tartozik az AB szakaszhoz, akkor az AC és CB szakaszok hosszainak összege mindig nagyobb az AB szakasz hosszánál. Tehát bármely A, B és C pontra mindig igaz, hogy $AB + BC \geqslant AC$.

Több szakmában is szükség van a szakaszok mérésére. A mérnökök tolómércét, az asztalosok colstokot, mérővesszőt, a szabók és a kőművesek mérőszalagot használnak (24. ábra).

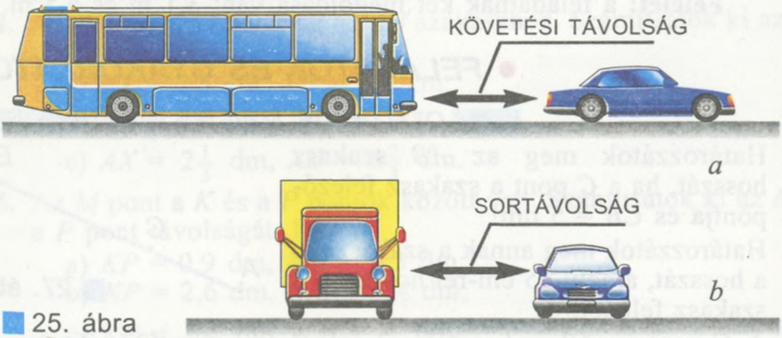


24. ábra

Érdeklődőknek

A mérőeszközök meghatározott pontossággal mérnek. Két város között a távolságot kilométerre, a folyó két partja közötti távolságot méterre, a ceruza hosszát cm-re, a karóra alkatrészének átmérőjét a milliméter századrészére, esetleg ezredrészére kerekítve adjuk meg. Természetes, hogy mindig megfelelő mértékegységet és megfelelő mérőeszközt válasszunk. Az előbb említett eszközökön kívül használhatunk körzőt, mérőónt. A hosszegységek is különbözőek. Az angol nyelvterületeken a mai napig használják a *lábat*, az *araszt* és a *mérföldet* is. Bővebben majd később foglalkozunk vele.

A gyakorlatban a távolság megnevezésére is több kifejezést használunk: *hosszúság*, *szélesség*, *magasságmélység*, *táv*, *sortávolság* (25. ábra).



25. ábra

Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mit nevezünk szakasznak? A szakasz végpontjainak?
2. Mit értünk két pont távolságán?
3. Mit jelent „a két szakasz metszi egymást" kifejezés?
4. Fogalmazzátok meg a szakasz mérésének tulajdonságát, axiómáját!
5. Mely szakaszok egyenlők?
6. Mi a szakasz felezőpontja?
7. Mely egyenlőtlenség teljesül bármely három pontra?

Oldjuk meg közösen!

1. A félegyenes az egyenes része. Igaz-e, hogy a félegyenes rövidebb az egyenesnél?

Az egyenesnek és félegyenesnek sincsen hossza, így az összehasonlítás értelmetlen.

Felelet: Nem.

2. A K, P és T pontok egy egyeneshez tartoznak. Határozzátok meg a P és T pont távolságát, ha $KP = 1{,}7$ m, $KT = 4{,}8$ m. Hány megoldása van a feladatnak?

Jelöljük a K és T pontokat úgy, hogy $KT = 4{,}8$ m. A P pont 1,7 m-re van a K ponttól. Két eset lehetséges (26. ábra):
a) a K pont a P és a T pont között van: $PT = 1{,}7$ m $+ 4{,}8$ m $= 6{,}5$ m;
b) a P pont a K és a T pont között van: $PT = 4{,}8$ m $- 1{,}7$ m $= 3{,}1$ m.

26. ábra

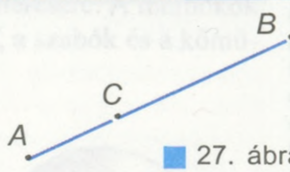
Felelet: a feladatnak két megoldása van: 3,1 m és 6,5 m.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

31. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát, ha a C pont a szakasz felezőpontja és $CB = 5$ dm!

32. Határozzátok meg annak a szakasznak a hosszát, amely 35 cm-rel hosszabb a szakasz felénél!



27. ábra

33. A C pont az AB szakaszt 1 : 2 arányban osztja (27. ábra). Határozzátok meg:
1) a CB szakasz hosszát, ha az AC hossza 1 cm; 3 dm; 10 km;
2) az AB szakasz hosszát, ha az AC szakasz hossza 2 cm; 5 dm; 30 m;
3) az AB szakasz hosszát, ha a CB szakasz hossza 2 cm; 6 m; 12 km!

34. Határozzátok meg annak a szakasznak a hosszát, melyet K és P pontja három egyenlő részre osztja és $KP = 7$ cm!

35. Az A és a B pont az a egyenes különböző oldalán van. Metszi-e az a egyenest az AB szakasz?

36. A K és a P pont a c egyenes ugyanazon oldalán van. Metszi-e a KP szakasz a c egyenest? Metszi-e a c egyenes a KP egyenest?

37. Az A pont a B és a C pont között helyezkedik el. Lehet-e a B pont az AC szakasz egyik belső pontja?

A

38. Vegyetek fel az adott egyenesen egy A és egy B pontot! Milyen szakaszt kaptatok? Jelöljétek meg a szakasz felezőpontját!

39. Vegyétek fel az A, B, C és D pontokat úgy, hogy semelyik három ne legyen egy egyenesen! Rajzoljátok meg az AB, AC, AD, BC, BD és CD szakaszokat!

40. Egy egyenesen vegyétek fel az A, B, C és D pontokat úgy, hogy az AC és BD szakaszoknak ne legyenek közös pontjaik, és a C valamint a B pontok az A és D pontok között helyezkedjenek el! Határozzátok meg az AB és CD szakaszok közös részét!

41. Az AB és CD egyenesek egymást metsző egyenesek. A C pont az AB szakasz belső pontja. Metszik-e egymást az AB és CD szakaszok?

42. Az AB szakasz metszi az a egyenest, a BC szakasz viszont nem és $C \notin a$. Metszi-e az a egyenest az AC szakasz?

43. Rajzoljátok le az AB, AC, AD, CB, CD, BD szakaszokat! Vegyétek figyelembe, hogy a C pont az A és a B pont között van, a B pont pedig a C és D között! Hány közös pontjuk van AC és BD, AC és CB, AB és CD szakaszoknak?

44. Az X pont hozzátartozik az AB szakaszhoz. Számítsátok ki az AB szakasz hosszát, ha:
 a) $AX = 2{,}5$ cm, $XB = 3{,}4$ cm;
 b) $AX = 5{,}3$ m, $XB = 4{,}2$ m;
 c) $AX = 2\frac{1}{3}$ dm, $XB = 6\frac{2}{3}$ dm.

45. Az M pont a K és a P pontok között van. Számítsátok ki az M és a P pont távolságát, ha:
 a) $KP = 0{,}9$ dm, $KM = 0{,}3$ dm;
 b) $KP = 2{,}6$ dm, $KM = 1{,}4$ dm;
 c) $KP = 2\frac{5}{6}$ dm, $KM = \frac{1}{6}$ dm.

46. A C pont az A és B pont között van. $AC = 5$ cm. A BC szakasz hossza 3 cm-rel több az AC szakasz hosszánál. Számítsátok ki az A és a B pont távolságát!

47. Egy egyeneshez tartoznak-e az A, B és C pontok, ha:
 a) $AB = 2{,}5$ cm, $BC = 3{,}8$ cm, $AC = 1{,}3$ cm;
 b) $AB = 1{,}9$ dm, $BC = 2{,}9$ dm, $AC = 4{,}9$ dm?

48. Az A, B, C és K pontok egy egyenesre illeszkednek. $AB = BC = CK$. Határozzátok meg a CK szakasz hosszát, ha $AC = 12$ cm!

49. Létezik-e az A, B és C pontoknak olyan kölcsönös helyzetük, hogy:
 a) $AB = 2{,}3$ cm, $BC = 3{,}5$ cm, $AC = 6{,}3$ cm;
 b) $AB = 5{,}1$ cm, $BC = 3{,}5$ cm, $AC = 6{,}8$ cm;
 c) $AB = 3{,}1$ cm, $BC = 7{,}2$ cm, $AC = 10{,}3$ cm?

B

50. Illeszkedhet-e a BC szakasz az AB félegyenesre, ha:
a) $AB = 9{,}2$ cm, $BC = 3{,}8$ cm, $AC = 13$ cm;
b) $AB = 9{,}2$ cm, $BC = 3{,}8$ cm, $AC = 5{,}4$ cm;
c) $AB = 9{,}2$ cm, $BC = 13{,}8$ cm, $AC = 4{,}6$ cm?

51. A C pont a 4,8 dm hosszúságú XY szakasz egyik belső pontja. Határozzátok meg az XC és CY távolságokat, ha:
a) $XC - CY = 1{,}3$ dm; b) $CY = 2XC$; c) $XC : CY = 1 : 5$!

52. Az A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek. $AB = 10$ dm, $BC = 3$ dm. Határozzátok meg az AC szakasz hosszát! Vizsgáljátok meg a összes lehetséges esetet!

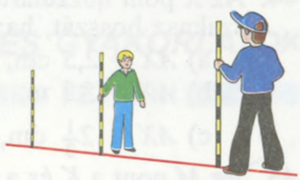
53. Az A, B, C és D pontok egy egyenesre illeszkednek, a B pont az AC szakasz felezőpontja. $BC = 7$ m, $CD = 10$ m. Határozzátok meg az AD távolságot!

54. Az A, B, C és D pontok egy egyenesre illeszkednek. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát, ha $AB = 10$ cm, $AC = 3$ cm, $BD = 4$ cm! Vizsgáljátok meg a lehetséges eseteket!

55. Rajzoljatok egy tetszőleges AB szakaszt. Rajzoljatok le egy olyan KP szakaszt, amely
a) háromszor hosszabb az AB szakasznál;
b) kétszer rövidebb az AB szakasznál;
c) az AB szakasz 2,5-szerese!

56. Hogyan lehet egy félméteres vonalzóval 2 méteres szakaszt rajzolni?

57. Magyarázzátok meg, hogy *jelölik ki az egyenest* irányléc segítségével (28. ábra)?


28. ábra

GYAKORLATI FELADAT

58. Mérd meg az iskolai padod hosszát és szélességét!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

59. Rajzoljatok egy 4 cm sugarú körvonalat! Osszátok fel 4 egyenlő hosszúságú ívre! Határozzátok meg egy ilyen rész hosszát!

60. Hány részre oszthatja a síkot két hozzá tartozó körvonal?

61. Határozzátok meg annak a kockának az élét, melynek az élei hosszának az összege 6 m!

62. Rajzoljátok át a füzetbe a 29. ábrán lévő alakzatot! Határozzátok meg a területét, ha egy négyzet területe 0,25 cm^2!


29. ábra

3. §. A szög és mértéke

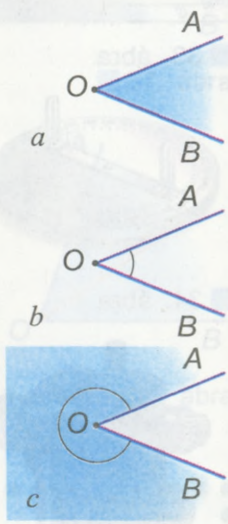
Két közös kezdőpontú félegyenes a síkot két részre osztja. A síknak azt a részét, melyet egy pontból kiinduló két félegyenes határol, *szögtartománynak, szögnek* nevezzük.

A félegyeneseket a szög *szárainak*, a közös kezdőpontot a szög *csúcsának* nevezzük (30. *a* ábra). A rajzon az *AOB*, vagy a *BOA*, esetleg az *O* szög látható. Jelölése: $AOB\angle$ vagy $BOA\angle$ vagy $O\angle$. Azok a pontok, melyek nem tartoznak a szárakhoz, a szög *belső pontjai*. A belső pontokat vonalkázással vagy ívvel jelöljük. A 30. *b* és 30. *c* ábrán is a szög csúcsa az *O* pont, a szög szárai az *OA* és *OB* félegyenesek.

Ha nincs körív rajzolva a szögszárak közzé, akkor a kisebbik szögtartományra gondolunk.

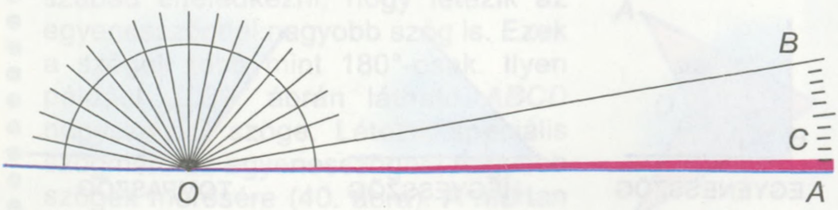
Azt a szöget, melynek szárai kiegészítő félegyenesek, *egyenesszögnek* nevezzük (31. ábra).

A szög méréséhez is mértékegységre van szükség. A szögmérés egyik leggyakoribb mértékegysége a *fok*: 1°. Az egyenesszög az 1° 180-szorosa. Képzeljünk el egy félkörvonalat, melyet 18 egyenlő ívre osztottak (32. ábra). Ha a körvonal *O* középpontjából minden osztóponton keresztül egy félegyenest húzunk, akkor az egyenesszöget 18 darab, 10°-os egyenlő szögre osztottuk. Egy ilyen szöget ($AOB\angle$) újra osszunk fel 10 egyenlő részre. Az *AOC* szög 1°-os.



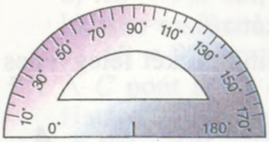
30. ábra

31. ábra

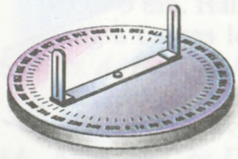


32. ábra

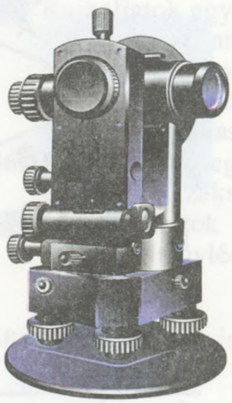
! Minden szögnek van fokmértéke.



33. ábra



34. ábra



35. ábra

Az egyenesszög 180°-os.

A szög fokmértékét ugyanúgy jelöljük, mint a szöget. Például, ha az *ABC* szög 60°-os, akkor így írjük: $ABC\angle = 60°$. A foknál kisebb szögeket szögpercben, szögmásodpercben mérjük.

A *szögpercnek* nevezzük a fok hatvanad részét, *szögmásodpercnek* a szögperc $\frac{1}{60}$-át. Így írjuk: $1° = 60'$; $1' = 60''$.

Szögmérésre a füzetben is és a táblán is *szögmérőt* (33. ábra), a csillagászatban az *asztrolábiumot* (34. ábra), hajózásnál a *szextánst*, földmérésben pedig a *teodolitot* használják (35. ábra).

Két szög *egyenlő*, ha azonos a fokmértékük.

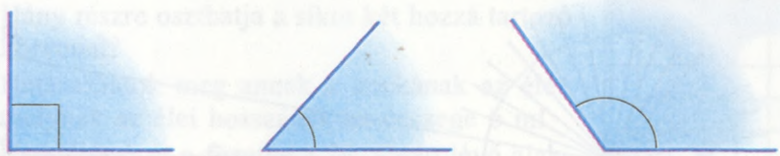
Két szög közül az a nagyobb, melynek a fokmértéke nagyobb.

A 90°-os szöget *derékszögnek* nevezzük. A derékszögnél kisebb szöget *hegyesszögnek*, a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szöget *tompaszögnek* nevezzük (36. ábra).

A rajzokon a derékszöget nem ívvel, hanem egy négyzettel jelöljük.

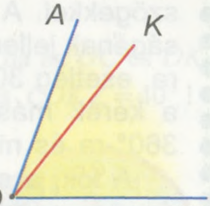
Az egyenesszögnél nagyobb szögekkel (lásd a 30. *c* ábrát) most még nem foglalkozunk.

A szög csúcsából induló, a szög belső tartományához tartozó félegyenest a szög *bel-*



36. ábra

ső félegyenesének nevezzük. A szög belső félegyenese a szöget két kisebb szögre osztja. Például az OK belső félegyenes az AOB szöget az AOK és KOB szögekre osztja (37. ábra). Miközben $AOK\angle + KOB\angle = AOB\angle$. Úgy fogalmazhatunk, hogy az AOB szög fokmértéke egyenlő az AOK és a KOB szögek fokmértékeinek összegével.

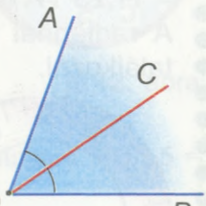


37. ábra

! A szög fokmértéke egyenlő azon szögek fokmértékeinek összegével, melyekre a belső félegyenesei osztják.

A ! -lel jelölt kijelentés a *szögek mérésének alaptulajdonsága*, axiómája.

Azt a belső félegyenest, amely a szöget két egyenlő részre osztja, *szögfelezőnek* nevezzük. A 38. ábrán az OC félegyenes az AOB szög szögfelezője.

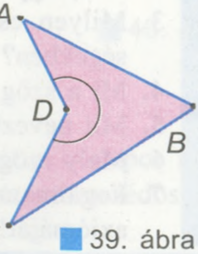


38. ábra

Érdeklődőknek

Néha *szögnek* nevezik az egy pontból kiinduló két félegyenest, tehát csak a szög szárait. De ebben az esetben nem beszélhetünk arról, hogy a szöget kettő vagy több egyenlő részre osztották. Abban az esetben, ha a szögek összegéről, különbségéről, esetleg részekre osztásáról van szó, akkor mindig a szárakkal határolt síkrészt vesszük figyelembe.

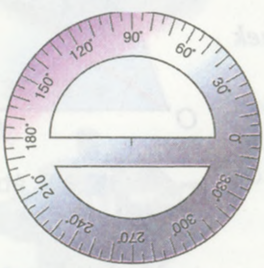
Annak ellenére, hogy a továbbiakban főleg az egyenesszögnél kisebb szögekkel fogunk foglalkozni, nem szabad elfeledkezni, hogy létezik az egyenesszögnél nagyobb szög is. Ezek a szögek több mint 180°-osak. Ilyen például a 39. ábrán látható $ABCD$ négyszög D szöge. Létezik speciális szögmérő az egyenesszögnél nagyobb szögek mérésére (40. ábra). A mértan nem foglalkozik a 360°-nál nagyobb



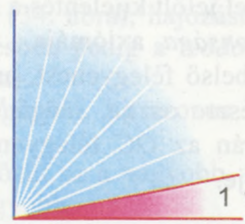
39. ábra

szögekkel. A szög fogalmát alkalmazzák a forgás nagyságának jellemzésére is. Például a kerékpár kerekét 100°-ra, esetleg 300°-ra is el lehet forgatni. És mikor tesz meg a kerék másfél fordulatot? Úgy tekintik, hogy elfordult 360°-ra és még 180°-ra, összesen 540°-ra.

A fok, a szögperc, szögmásodpercen kívül még másmilyen mértékegységet is használunk szögmérésre. A tengerészek a *vonást* alkalmazták, ami a kör kerületének 1/32-ed része, vagy a derékszög nyolcadrésze. 1 vonás = = 11,25°. A tudományban a *radián* a szög mértékegysége. A radiánnal a középiskolai tanulmányaitok során fogtok találkozni.



40. ábra



41. ábra

Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mi a szög? Hogyan jelöljük a szöget?
2. Melyik szöget nevezzük:
   a) hegyesszögnek;
   b) tompaszögnek;
   c) derékszögnek;
   d) egyenesszögnek?
3. Milyen eszközökkel mérünk szöget? Milyen mértékegységekben?
4. Mi a szög belső tartománya? Belső félegyenese?
5. Mit nevezünk a szög szögfelezőjének?
6. Mely szögek egyenlők?
7. Fogalmazzátok meg a szögek mérésének alaptulajdonságát, axiómáját!

Oldjuk meg közösen!

1. Határozzátok meg az AOB szög fokmértékét, ha az OC és OK félegyenesek három egyenlő részre osztják és $COK\angle = 40°$!

A COK szög az AOB szög harmada, ezért $AOB\angle = 40° \cdot 3 = 120°$.

Felelet: 120°.

2. Határozzátok meg hány fokos szöget zár be az óra kis- és nagymutatója 3 órakor; 5 órakor (42. ábra)!

42. ábra

Az óra számtábláján egy félkör 6 órának felel meg. Ezért 1 órának az egyenesszög hatoda felel meg, tehát 30°. Amikor az óra 3 órát mutat, a kis és nagymutató $30° \cdot 3 = 90°$-os szöget zár be. Öt órakor a mutatók $30° \cdot 5 = 150°$-os szöget zárnak be.

Felelet: 90°; 150°.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

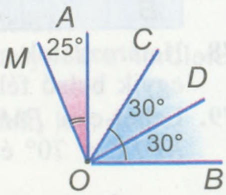
OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

63. Hány szögperc 2°? Másfél fok?

64. 1) Nevezzétek meg a 43. ábrán látható összes szöget! A megnevezett szögek közül melyik hegyesszög; derékszög; tompaszög?

2) Az AOB szög derékszög. $MOA\angle = 25°$, $COD\angle = DOB\angle = 30°$. Határozzátok meg az $MOB\angle$ és $AOC\angle$ fokmértékét!

3) Hasonlítsátok össze az MOC és AOD, valamint az AOD és COB szögeket!



43. ábra

65. Határozzátok meg, hány fokos szöget zárnak be azok a félegyenesek, melyek az egyenesszöget három egyenlő részre osztják!

66. A körlap középpontjából húzott félegyenesek a körlapot négy egyenlő részre osztják. Határozzátok meg két szomszédos félegyenes által bezárt szöget!

A

67. Rajzoljatok egy hegyesszöget! Jelöljétek betűkkel a csúcsát és a szárait! Színezzétek ki a szög belső tartományát!
68. Rajzoljatok egy tompaszöget! Jelöljétek meg a csúcsát és a szárait, valamint ívvel a szög belső tartományát!
69. Rajzoljatok egy *KPT* egyenesszöget! Nevezd meg a szög csúcsát és szárait! Jelöljétek ívvel a szög belső tartományát!
70. Jelöljetek ki három, *A*, *B* és *C* pontot úgy, hogy ne legyenek egy egyenesen! Rajzoljátok meg az *ABC* szöget! Lehet-e az *ABC* szög egyenesszög?
71. Szögmérő segítségével rajzoljatok 50°-os, 90°-os és 120°-os szögeket! Húzzátok meg a megrajzolt szögek szögfelezőit!
72. Rajzoljatok szemre 30°-os, 45°-os és 60°-os szögeket! Húzzátok meg a megrajzolt szögek szögfelezőit!
73. Fejezzétek ki fokokban és szögpercekben 135′-et, 5000′-et!
74. Fejezzétek ki szögpercekben: 6°15′; 2°; 11,5°!
75. Végezzétek el a kijelölt műveletet:
a) 5°48′ + 7°35′; b) 32°17′ – 8°45′!
76. Végezzétek el a kijelölt műveletet:
a) 33°33′ + 15°15′; b) 145°54′ – 41°41′;
c) 123°45′ + 54°32′; b) 44°14′ – 14°44′!
77. Töltsétek ki a táblázatot, ahol *A* egy szög fokmértéke, *B* pedig ennek a szögnek a szögfelezője és a szára által bezárt szög fokmértéke!

A	10°		60°		100°	180°
B		50°		45°		

78. Határozzátok meg az *AOB* szög fokmértékét, ha *OC* az *AOB* szög egyik belső félegyenese, és *AOC*∠ = 60°, *COB*∠ = 30°!
79. Lehet-e a *PM* félegyenes a *KPT* szög belső félegyenese, ha *KPT*∠ = 70° és *KPM*∠ = 80°? És ha a *KPM*∠ = 20°?

B

80. Hány fokos szöget ír le az óra nagymutatója 20 perc alatt? 30 perc alatt?
81. Hány fokos szöget ír le az óra kismutatója 0,5 óra alatt? 5 perc alatt?
82. Határozzátok meg az *MOB* szög fokmértékét, ha *AOM*∠ = 25° és *AOM*∠ : *MOB*∠ = 4 : 5!
83. Határozzátok meg az *AOB* szög fokmértékét, ha *AOM*∠ = 30°, *MOB*∠ = 60° és ezek a szögek egy síkhoz tartoznak?

84. Az AOB és MOB szögek egy síkban vannak. Fokmértékük megfelelően 120° és 60°. Határozzátok meg az AOM szög fokmértékét! Vizsgáljatok meg két esetet!

85. Rajzoljatok egy AOB szöget és húzzátok meg két belső, OK és OM félegyenesét úgy, hogy $AOB\angle = 90°$, $AOK\angle = 40°$, $MOB\angle = 30°$! Határozzátok meg a KOM szög fokmértékét!

86. Az AOB szög szögfelezője OM, az AOM szög szögfelezője OK. Hányszor kisebb a KOM szög az AOB szögnél?

87. Az OM félegyenes az AOB derékszög szögfelezője. OK és OP félegyenesek az AOM és MOB szögek szögfelezői. Mekkora a KOP szög?

88. $AOM\angle = 30°$, a BOM szög 20°-kal nagyobb. Határozzátok meg az AOB szög fokmértékét! Vegyetek figyelembe minden lehetőséget!

89. Az OK és OM félegyenesek az AOB szög belső félegyenesei. OK az MOB szög szögfelezője. $AOB\angle = 150°$, a KOB szög 40°-kal kisebb az MOB szögnél. Határozzátok meg az AOM és MOK szögek fokmértékét!

GYAKORLATI FELADAT

90. a) Vágjatok ki papírból egy hegyes-, egy derék- és egy tompaszöget! Szögmérővel mérjétek meg hány fokosak!
b) Hajtogassatok papírlapból 180°-os; 90°-os; 45°-os; 30°-os; 60°-os szöget!

ISMÉTLŐ FELADATOK

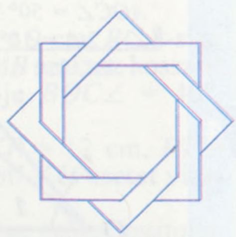
91. Egy négyzet területe 16 cm^2. Mekkora a kerülete?

92. Mekkora a kerülete annak a téglalapnak, melynek a területe 40 cm^2, egyik oldala pedig 5cm?

93. Egy egyenesen fekszenek-e az A, B és C pontok, ha:
a) $AB = 5$ dm, $BC = 7$ dm, $AC = 10$ dm;
b) $AB = 35$ cm, $BC = 45$ cm, $AC = 1$ dm;
c) $AB = \frac{3}{4}$ hüvelyk, $BC = \frac{2}{3}$ hüvelyk, $AC = \frac{1}{12}$ hüvelyk?

94. Hogyan számítjátok ki annak a derékszögű háromszögnek a területét, melynek az oldalai 3, 4 és 5 cm?

95. Rajzoljátok át a füzetbe a 44. ábrán látható rajzot! Fessétek ki két színnel!



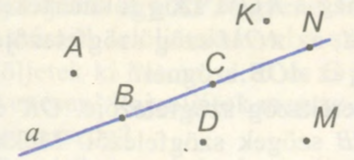
44. ábra

Rajzos feladatok

1

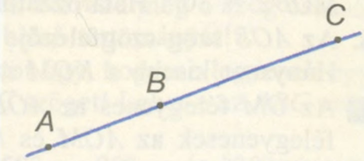
A

Mely pontok
a) vannak az a egyenesen;
b) vannak az a egyenesen kívül?



B

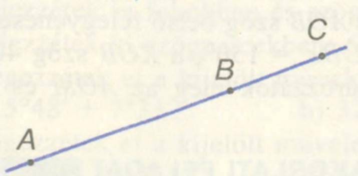
$AC = 10$, $AB : BC = 2 : 3$.
AB, BC



2

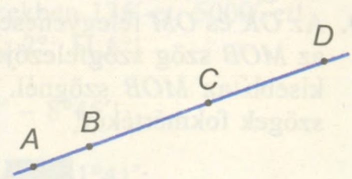
A

$AB = \frac{2}{3} AC$, $BC = 5$.
AB, AC



B

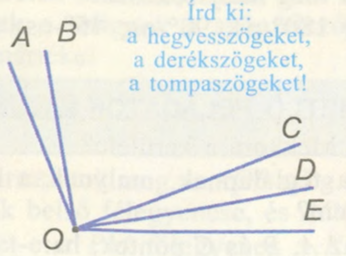
$AD = 20$, $BC = CD = 2AB$.
AB, BC, CD, BD



3

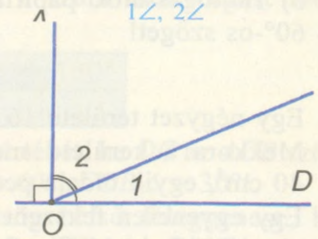
A

Írd ki:
a hegyesszögeket,
a derékszögeket,
a tompaszögeket!



B

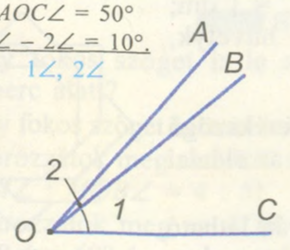
$2\angle = 2 \cdot 1\angle$.
$1\angle$, $2\angle$



4

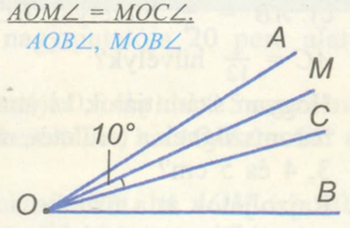
A

$AOC\angle = 50°$
$1\angle - 2\angle = 10°$.
$1\angle$, $2\angle$



B

OC az $AOB\angle$ szögfelezője,
$AOM\angle = MOC\angle$.
$AOB\angle$, $MOB\angle$



1. számú önálló munka

1. változat

A C pont az AB szakasz egyik belső pontja. $AC = 6$ cm, a BC szakasz 2 cm-rel rövidebb az AC-nál. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát!

$AOB\angle = 130°$. Határozzátok meg a BOC szög mértékét, ha OC az AOB szög szögfelezője!

Az A, B és C pontok egy egyenesen vannak. $AB = 9$ cm, $BC = 4$ cm. Határozzátok meg az AC szakasz hosszát! Két esetet vizsgáljatok!

Az OC félegyenes a 80°-os AOB szöget két olyan szögre osztotta, melyek közül az egyik a másik szög háromszorosa. Mekkora az AOC és a BOC szög?

2. változat

A C pont az AB szakasz egyik belső pontja. $BC = 4$ cm, az AC szakasz 2-szer hosszabb a BC-nél. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát!

Az OC félegyenes az AOB szög szögfelezője! $AOC\angle = 50°$. Határozzátok meg a AOB szög mértékét!

Az M, N és K pontok egy egyenesen vannak. $MN = 6$ cm, $NK = 10$ cm. Határozzátok meg az MK szakasz hosszát! Két esetet vizsgáljatok meg!

Az OC félegyenes a 70°-os AOB szöget két olyan szögre osztotta, melyek közül az egyik 20°-kal nagyobb, mint a másik. Mekkora az AOC és a BOC szög?

3. változat

A C pont az AB szakasz egyik belső pontja. $AC = 4$ cm, a BC szakasz 3 cm-rel hosszabb az AC-nál. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát!

$AOB\angle = 60°$. Határozzátok meg a AOC szög fokmértékét, ha OC az AOB szög szögfelezője!

Az E, F és P pontok egy egyenesen vannak. $EF = 7$ cm, $FP = 3$ cm. Határozzátok meg az EP szakasz hosszát! Két esetet vizsgáljatok meg!

Az OC félegyenes a 100°-os AOB szöget két olyan szögre osztotta, hogy $AOC\angle : BOC\angle = 2 : 3$. Mekkora az AOC és a BOC szög?

4. változat

A C pont az AB szakasz egyik belső pontja. $AC = 9$ cm, BC 3-szor rövidebb az AC szakasznál. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát!

Az OC félegyenes az AOB szög szögfelezője $BOC\angle = 40°$. Határozzátok meg az AOB szög mértékét!

A K, P és T pontok egy egyenesen vannak. $KP = 12$ cm, $PT = 5$ cm. Határozzátok meg a KT szakasz hosszát! Két esetet vizsgáljatok meg!

Az OC félegyenes a 120°-os AOB szöget két olyan szögre osztotta, melyek közül az egyik 30°-kal kisebb, mint a másik. Mekkora az AOC és a BOC szög?

1. számú teszt feladatsor

1.	Az a és b egyenesek az O pontban metszik egymást. Melyik egyenesen van az O pont?	a) a; b) b; c) a és b; d) egyiken sincs.
2.	Hány részre osztja a síkot két egymást metsző egyenes?	a) 2; b) 3; c) 4; d) 6.
3.	Az X, Y és Z pontok közül melyik van a másik kettő között, ha $XY = 3$, $YZ = 7$, $XZ = 4$?	a) X; b) Y; c) Z; d) egyik sem.
4.	Az M pont az AB szakasz felezőpontja. $AM = 7$ cm. Mekkora az AB szakasz?	a) 14 cm; b) 21 cm; c) 3,5 cm; d) 7 cm.
5.	A K pont az AB szakasz egyik belső pontja. $AK = 3$ cm, $AB = 10$ cm. Mekkora a KB szakasz?	a) 13 cm; b) 7 cm; c) 30 cm; d) 8 cm.
6.	Határozzátok meg annak a szögnek a fokmértékét, melynek a szögfelezője 20°-os szöget zár be a szög szárával!	a) 20°; b) 10°; c) 30°; d) 40°.
7.	$AOB\angle = 110°$. Az OM félegyenes az AOB szög egyik belső félegyenese. Mekkora az AOM szög, ha $BOM\angle = 60°$?	a) 50°; b) 170°; c) 90°; d) 70°.
8.	Az OM félegyenes az AOB szög egyik belső félegyenese. $AOM\angle = 40°$ a BOM szög fokmértéke pedig 10°-kal több. Mekkora az AOB szög?	a) 70°; b) 50°; c) 90°; d) 44°.
9.	Az A, B és C pontok egy egyenesen vannak. $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm. Határozzátok meg az AC szakasz hosszát!	a) 17 cm; b) 7 cm; c) 17 cm vagy 7 cm; d) 18 cm vagy 8 cm.
10.	$AOB\angle = 50°$, $BOC\angle = 20°$. Mekkora az AOC szög?	a) 70°; b) 30° vagy 70°; c) 30°; d) 70° vagy 40°.

Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mivel foglalkozik a mértan?
2. Mivel foglalkozik a síkmértan?
3. Nevezz meg néhány síkmértani alakzatot és néhány nem síkmértanit!
4. Hogyan értelmezhetjük a *pontot*?
5. Hogyan értelmezhetjük az *egyenest*?
6. Hogyan értelmezhetjük a *síkot*?
7. Hozzatok fel olyan példákat, melyekkel modellezhető a pont, az egyenes, a sík!
8. Mit jelent $A \in a$, $A \notin b$ felírás?
9. Mit jelent, hogy a „B pont az A és a C pont között van" kifejezés?
10. Fogalmazzátok meg az egy egyenesen lévő pontok kölcsönös helyzetének fő tulajdonságát!
11. Mit nevezünk félegyenesnek?
12. Hogyan jelöljük a félegyeneseket?
13. Mit nevezünk kiegészítő félegyeneseknek?
14. Mit nevezünk szakasznak?
15. Mi a szakasz végpontja?
16. Milyen egységekkel mérhetünk szakasz hosszát?
17. Fogalmazzátok meg a szakasz mérésének alaptulajdonságát, axiómáját!
18. Mi a szakasz felezőpontja?
19. Milyen egyenlőtlenség teljesül bármely három pontra?
20. Mit értünk két pont távolságán?
21. Mit nevezünk szögnek?
22. Hogyan jelöljük a szögeket?
23. Melyik szöget nevezzük hegyesszögnek?
24. Melyik szöget nevezzük tompaszögnek?
25. Melyik szöget nevezzük derékszögnek?
26. Melyik szöget nevezzük egyenesszögnek?
27. Milyen mértékegységet használunk szögmérésre?
28. Mit nevezünk a szög belső tartományának?
29. Mi a szög belső félegyenese?
30. Fogalmazzátok meg a szög mérésének alaptulajdonságát, axiómáját!
31. Mit nevezünk szögfelezőnek?
32. Mikor egyenlő két szög?

Az 1. fejezet összefoglalása

A *geometria* mértani alakzatokkal és azok tulajdonságaival foglakozó tudományág. A legegyszerűbb mértani fogalom a *pont*. Minden más mértani alakzat pontokból áll, tehát pontok halmaza. Alapfogalom még az *egyenes* és a *sík*. Nincs meghatározásuk, főbb tulajdonságaik alapján alkotunk róluk képet. Azokat az alakzatokat melyek egy síkban vannak *síkmértani alakzatoknak, síkidomoknak* nevezzük. A mértannak azt a részét mely egy síkban lévő mértani alakzatokkal és azok tulajdonságaival foglakozik, *planimetriának* nevezzük.

Egy egyenesen lévő pontok kölcsönös helyzetének alaptulajdonságai

- **Bármilyen is legyen az egyenes, léteznek olyan pontok, melyek rajta vannak és léteznek olyan pontok, melyek az egyenesen kívül vannak.**
- **Bármilyen két ponton át egy, és csakis egy egyenest húzhatunk.**
- **Az egyenes három pontja közül az egyik a másik kettő között van.**

A *szakasz* és a *félegyenes* az egyenes része. Az AB szakasz az A és B pontok között lévő pontok halmaza, valamint az A és a B pont.

Minden szakaszhoz hozzárendelhető a hossza. A szakasz hossza a végpontok közötti távolság. Hosszúságot mérhetünk méterben, centiméterben, deciméterben, kilométerben, lábban, hüvelykben, mérföldben. De használhatunk másmilyen hosszegységet is.

A szakasz mérésének alaptulajdonsága

- **Minden szakasznak van hossza.**
- **A szakasz hossza egyenlő azon részek hosszainak összegével, melyre bármelyik belső pontja osztja.**

A síknak azt a részét, melyet egy pontból kiinduló két félegyenes határol, *szögnek* nevezzük. Megkülönböztetünk hegyes-, tompa-, derék- és egyenesszöget, valamint az egyenesszögnél nagyobb szöget. Szöget mérhetünk fokokban, szögpercekben, szögmásodpercekben, vonásban, radiánban.

A szög mérésének alaptulajdonsága

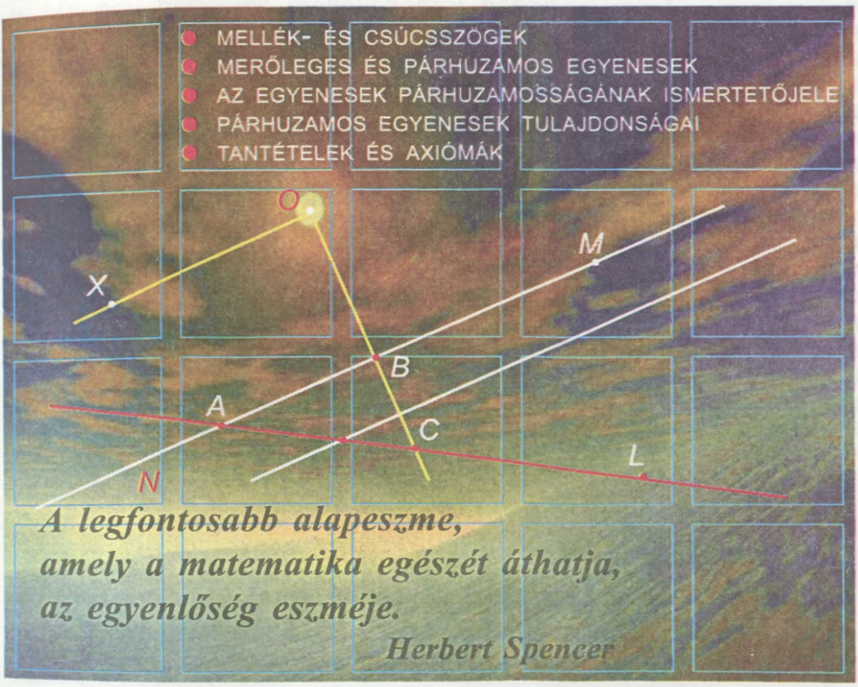
- **Minden szögnek van mértéke.**
- **A szög mértéke egyenlő azon részek mértékeinek összegével, melyre bármelyik belső félegyenese osztja.**

A *szögfelező* a szög olyan belső félegyenese, amely azt két egyenlő nagyságú szögre osztja.

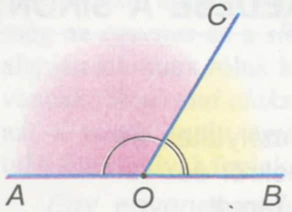
2. fejezet

AZ EGYENESEK KÖLCSÖNÖS ELHELYEZKEDÉSE A SÍKON

Ebben a fejezetben elmélyítitek és kibővítitek az egyenesekről és félegyenesekről eddig tanult ismereteiteket. Megismerkedtek olyan fontos fogalmakkal, mint a ***mellékszögek***, ***csúcsszögek***, ***merőleges egyenesek***, ***párhuzamos egyenesek***, valamint az ***axióma***, ***tantétel***, ***következmény***, ***ismertetőjel*** és ***definíció*** fogalmakkal.



4. §. *Mellékszögek és csúcsszögek*



45. ábra

Az egyenesszöget bármely belső félegyenese két szögre osztja. Ezeket a szögeket *mellékszögeknek* nevezzük.

A mellékszögek egyik szára közös, másik száruk pedig kiegészítő félegyenes. Ha az A, O és B pontok egy egyenesen vannak, a C pont pedig a sík bármely olyan pontja, mely az adott egyenesen kívül van, akkor az $AOC\angle$ és a $COB\angle$ mellékszögek (45. ábra).

A mellékszögek tulajdonságát *tantételben* mondjuk ki.

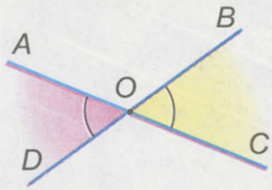
A **tantétel** olyan állítás, melynek az igazságát alapfogalmakkal és logikus következtetésekkel bizonyítani lehet.

A tantételek a tankönyvben **félkövér** betűkkel vannak szedve és számozottak.

! 1. tantétel. **A mellékszögek összege 180°-kal egyenlő.**

BIZONYÍTÁS.

Két mellékszög egyesítése egyenesszög. Az egyenesszög fokmértéke 180°, így a mellékszögek összege is 180°.□



46. ábra

Két szöget *csúcsszögnek* nevezünk, ha az egyik szög szárai a másik szög szárainak kiegészítő félegyenesei.

Például, ha az O pont az AC és a BD egyenesek metszéspontja, akkor az $AOD\angle$ és a $BOC\angle$ csúcsszögek (46. ábra). Mind a két szög az $AOB\angle$ mellékszöge. Az $AOB\angle$ és a $COD\angle$ is csúcsszögek.

! 2. tantétel. **A csúcsszögek egyenlők.**

BIZONYÍTÁS.

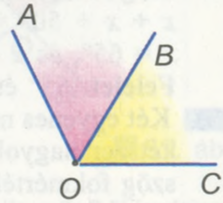
Az $AOD\angle$ és a $BOC\angle$ csúcsszögek (46. ábra). Mind a két szög az $AOB\angle$ mellékszöge. A mellékszögekről szóló tétel alapján:

$$AOD\angle + AOB\angle = 180° \text{ és } BOC\angle + AOB\angle = 180°.$$

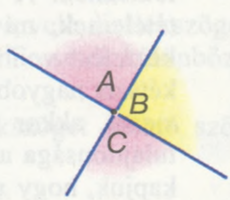
Tehát $AOD\angle = 180° - AOB\angle$ és $BOC\angle = 180° - AOB\angle$. Mivel az egyenlőség jobb oldalai egyenlők, így $AOD\angle = BOC\angle$. A tételt bebizonyítottuk.□

Érdeklődőknek

A *mellék* kifejezést nem csak szögek esetén használják. *Mellék* valaminek a melléke, a mellette lévő hely, terület; vagy valamihez tartozó, szomszédos. Beszélhetünk mellékhelyiségről, mellékutcáról. Szögek esetén e fogalom különös jelentéssel bír. Nem minden esetben nevezünk két, egymással „érintkező" szöget mellékszögnek. Például a 47. ábrán lévő *AOB* és *BOC* szögeknek közös *OB* oldaluk van, de mégsem mellékszögek. Mellékszögek olyan szögek, amelyek között bizonyos összefüggés van. Egy szög önmagában véve nem lehet mellékszög. Ha egy bizonyos mellékszögről beszélünk, akkor hozzá kell tenni, hogy melyik szöggel alkot mellékszöget. A mellékszögek a következő tulajdonsággal rendelkeznek: **ha az *A* szög a *B* mellékszöge, akkor a *B* az *A* szög mellékszöge.**



47. ábra



48. ábra

Legyen az $A\angle$ a $B\angle$ mellékszöge, a $B\angle$ pedig a $C\angle$ mellékszöge. Mit mondhatunk az *A* és a *C* szögekről? Ezek vagy csúcsszögek, vagy a $C\angle$ egybeesik az *A* szöggel (48. ábra).

A *csúcs* kifejezést is többféle szóösszetételben használjuk. Mondjatok néhányat!

A csúcsszögekre mindig igaz az alábbi tulajdonság: **ha az *A* szög és a *B* szög csúcsszögek, akkor a *B* szög és az *A* szög is csúcsszögek.**

? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Milyen szögeket nevezünk mellékszögeknek?
2. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a mellékszögek tulajdonságát!
3. Milyen szögeket nevezünk csúcsszögeknek?
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a csúcsszögek tulajdonságát!

Oldjuk meg közösen!

1. Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül az egyik 50°-kal nagyobb a másiknál!

Jelöljük a kisebb szög fokmértékét x-szel, akkor a nagyobb szög fokmértéke $x + 50°$. A mellékszögek tulajdonsága alapján $x + x + 50° = 180°$. Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $x = 65°$, és $x + 50° = 115°$.

Felelet. 65° és 115°.

2. Két egyenes metszésekor keletkezett négy szög közül az egyik kétszer nagyobb a másiknál. Határozzátok meg mind a négy szög fokmértékét!

Két egyenes metszésekor csúcsszögek és mellékszögek keletkeznek. A csúcsszögek nem felelnek meg a feladat feltételeinek, mivel egyenlő fokmértékűek. Tehát azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a mellékszögek közül az egyik kétszer nagyobb a másiknál. Jelöljük a kisebb szög fokmértékét x-szel, akkor a másik szög fokmértéke $2x$. A mellékszögek tulajdonsága alapján $x + 2x = 180°$. Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $x = 60°$, és $2x = 120°$. A megfelelő csúcsszögek is 60 és 120 fokosak.

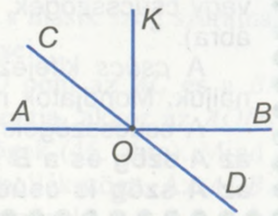
Felelet. 60°, 120°, 60°, 120°.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

96. Nevezd meg a 49. ábrán látható mellékszögeket!

97. Mellékszögek-e a KOB és a KOA szögek (49. ábra)? És az AOD és AOC szögek?



49. ábra

98. Az A szög hegyesszög. Lehet-e hegyesszög a vele mellékszöget alkotó szög? És derékszög?

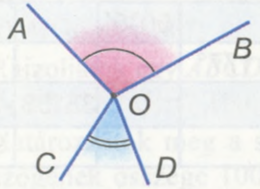
99. Milyen szög egy tompaszög mellékszöge?

100. Az A és a B szög összege 180°. Mellékszögek-e ezek a szögek?

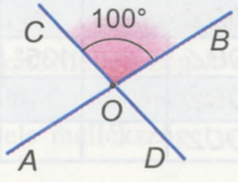
101. Az egyenesszöget két belső félegyenese három szögre osztja. Mellékszögek-e ezek a szögek?

102. Csúcsszögek-e az 50. ábrán látható AOB és COD szögek?

103. Két egyenes metszésekor keletkezett egyik szög fokmértéke 100°. Határozzátok meg a többi szög fokmértékét!



50. ábra



51. ábra

104. A mellékszögek egyike 50°. Mekkora a másik szög? Készítsetek rajzot!

105. Az egyik szög 160°-os. Határozzátok meg a vele mellékszöget alkotó szög fokmértékét! Készítsetek rajzot! Fessétek különböző színűre a két szöget!

106. Határozzátok meg az *ABC* szöggel mellékszöget alkotó szög fokmértékét, ha:
a) $ABC\angle = 34°$; b) $ABC\angle = 111°$;
c) $ABC\angle = 13°13'$; d) $ABC\angle = 135°47'$!

107. Bizonyítsátok be, hogy ha a **mellékszögek egyenlők, akkor derékszögek!**

108. Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül az egyik:
a) 30°-kal nagyobb a másiknál;
b) kétszer kisebb a másiknál!

109. Határozzátok meg azon mellékszögeket, melyek aránya: a) 4 : 5; b) 3 : 2!

110. Rajzoljatok egy 45°-os szöget és a vele csúcsszöget alkotó szöget!

111. Két csúcsszög összege 120°. Mekkorák ezek a szögek?

112. Határozzátok meg két egyenes metszésekor keletkezett szögek fokmértékét, ha az egyik szög:
a) 50°; b) 110°; c) n°!

113. Rajzoljátok át a füzetbe a táblázatot, és töltsétek ki!

Adott szög	10°	50°	60°	90°	120°	170°
Vele csúcsszöget alkotó szög						
Vele mellékszöget alkotó szög						

114. Rajzoljátok át a füzetbe a 46. ábrát és az alábbi táblázatot! A rajz alapján töltsétek ki a táblázatot!

$AOD\angle$	66°					50°5′		
$AOB\angle$		135°			177°			
$BOC\angle$				39°			33°33′	
$DOC\angle$			97°					99°9′

B

115. Két egyenes metszésekor keletkezett szögek lehetnek-e arányosak az alábbi számokkal?

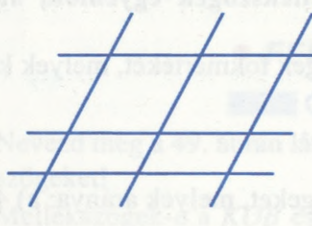
a) 2, 3, 4 és 5; b) 5, 5, 5 és 8; c) 2, 3, 2 és 3; d) 1, 4, 2 és 8.

116. Bizonyítsátok be, hogy **egyenlő szögek mellékszögei egyenlők**!

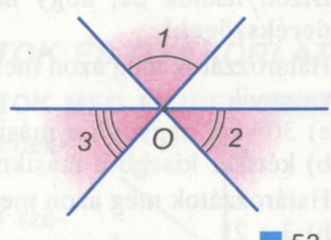
117. Rajzoljatok három olyan egyenest, hogy egy pontban metsszék egymást! Hány csúcsszög keletkezett?

118. Hány csúcsszöget és hány mellékszöget látsz az 52. ábrán?

119. Az 53. ábrán három egyenest látsz, melyek egy pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $1\angle + 2\angle + 3\angle = 180°$!



52. ábra



53. ábra

120. Határozzátok meg két egyenes metszésekor keletkezett szögek fokmértékét, ha:

a) az egyik szög 20°-kal nagyobb, mint a másik;

b) az egyik szög a másik szög felével egyenlő;

c) két szög összege 100°!

121. Az AOB egyenesszöget az OM félegyenes két szögre osztja. Az egyik szög 20°-kal nagyobb, mint a másik. Határozzátok meg a keletkezett szögek és a szögek szögfelezői által bezárt szög fokmértékét!

122. Az AOB és BOC szögek mellékszögek. Az OM félegyenes a $BOC\angle$ szögfelezője. Határozzátok meg az AOB szög fokmértékét, ha:

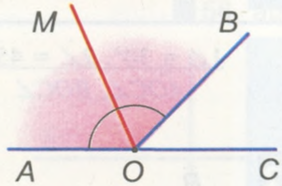
a) $MOC\angle = 30°$; b) $MOC\angle = 45°$; c) $MOC\angle = 60°$!

123. Rajzoljatok egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kockát! Mellékszögek-e az ABB_1 és BB_1C? Miért? Hány fokos az $ABB_1\angle$ mellékszöge?

124. Határozzátok meg a szöget, ha a vele mellékszöget alkotó két szögének összege 100°!

125. Az AOB és BOC szögek mellékszögek. Az OM félegyenes az AOB szög szögfelezője (54. ábra). Határozzátok meg az $MOB\angle$ fokmértékét, ha:

a) $AOB\angle - BOC\angle = 40°$;
b) $AOB\angle : BOC\angle = 5°$;
c) $AOB\angle : BOC\angle = 5 : 4$;
d) a BOC szög az AOB szög $\frac{2}{5}$-e!



54. ábra

GYAKORLATI FELADAT

126. Papírhajtogatással állítsatok elő mellékszögeket és csúcsszögeket!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

127. Két kocka éleinek aránya 1 : 2. Mekkora a kockák térfogatainak és felszíneinek az aránya?

128. Jelöljétek az $A(1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$ és $D(5; -1)$ pontokat a koordinátasíkon, majd kössétek össze őket szakaszokkal! Hogyan hívjuk a kapott $ABCD$ mértani alakzatot? Mely oldalai párhuzamosak és melyek merőlegesek?

129. Egy 3 cm sugarú körlapot osszatok fel 6 egyenlő körcikkre. Határozzátok meg egy ilyen körcikk területét! Mennyivel kevesebb a körcikk területe a körlap területénél?

130. Az 55. ábrán látható alakzat 9 egybevágó lapból áll. Határozzátok meg egy ilyen alakzat területét, ha az A, B, C és D pontok egy olyan négyzet csúcsai melynek a területe S!

55. ábra

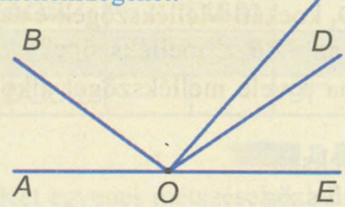
Rajzos feladatok

A | **B**

1

A

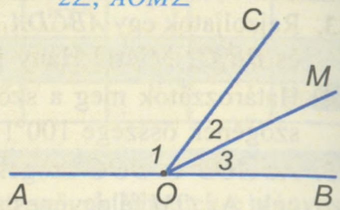
Határozzátok meg a mellékszögeket!



B

$1\angle = 120^\circ,\ 2\angle = 3\angle.$

$2\angle$, $AOM\angle$

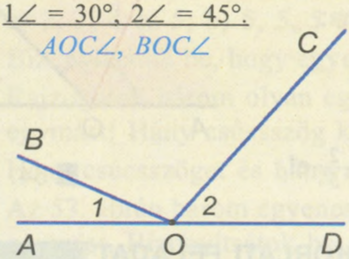


2

A

$1\angle = 30^\circ,\ 2\angle = 45^\circ.$

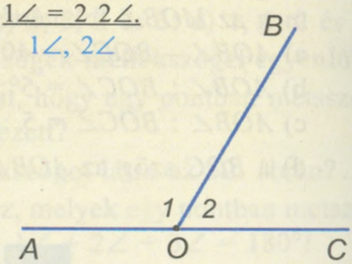
$AOC\angle$, $BOC\angle$



B

$1\angle = 2\,2\angle.$

$1\angle$, $2\angle$

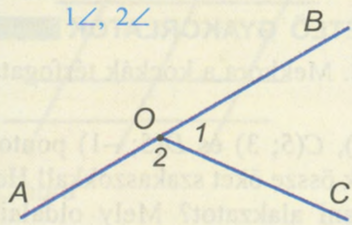


3

A

$2\angle - 1\angle = 40^\circ.$

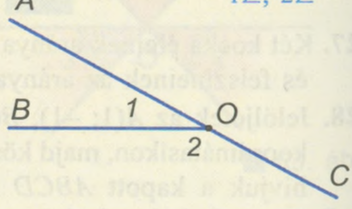
$1\angle$, $2\angle$



B

$1\angle : 2\angle = 2 : 7$

$1\angle$, $2\angle$

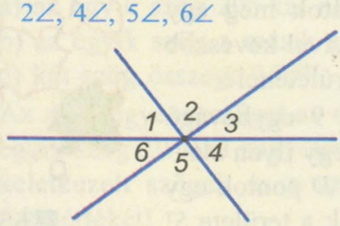


4

A

$1\angle = 60^\circ,\ 3\angle = 40^\circ.$

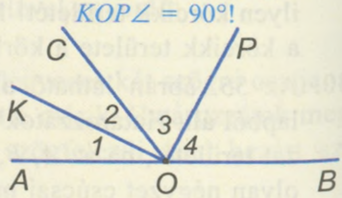
$2\angle$, $4\angle$, $5\angle$, $6\angle$



B

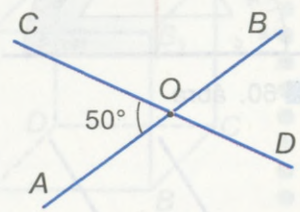
$1\angle = 2\angle,\ 3\angle = 4\angle.$

Bizonyítsátok be, hogy $KOP\angle = 90^\circ$!



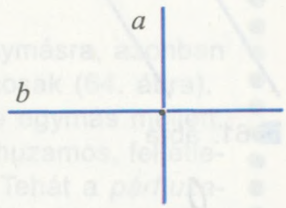
5. §. *Merőleges és párhuzamos egyenesek*

Emlékezzetek vissza, milyen lehet két egyenes kölcsönös helyzete a síkon! Ha metszik egymást, akkor négy részre osztják a síkot, négy szög keletkezik, melyek egymással páronként csúcsszögeket alkotnak. Természetesen az egyenesszögnél kisebb szögekre kell gondolni. A kisebbik szöget fogadjuk el a két egyenes *hajlásszögének*. Például, az 56. ábrán az AB és a CD egyenesek hajlásszöge 50°, 50°-os szög alatt metszik egymást. Ha két egyenes metszésekor négy derékszög keletkezik, akkor azt mondjuk, hogy derékszögben metszik egymást.



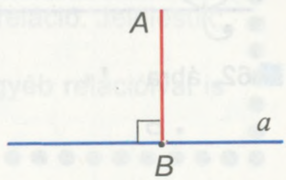
56. ábra

Azokat az egyeneseket, melyek derékszögben metszik egymást, *merőleges egyeneseknek* nevezzük. Az 57. ábrán az a és a b egyenesek merőleges egyenesek. Így jelöljük: $a \perp b$ vagy $b \perp a$.



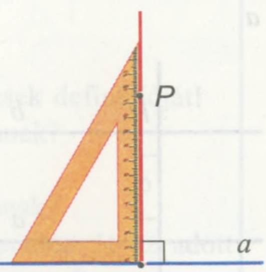
57. ábra

Két *szakasz* vagy két *félegyenes* akkor *merőleges*, ha merőleges egyenesekre illeszkednek.

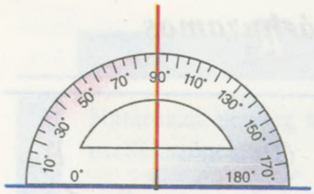


58. ábra

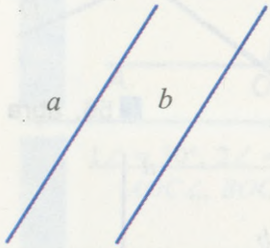
Ha az AB szakasz az a egyenesre merőleges egyenes része, akkor azt mondjuk, hogy az *AB szakasz merőleges az a egyenesre*. Ha a B pont az a egyenesen van, akkor az AB szakaszt az A pontból az a egyenesre húzott *merőlegesnek* nevezzük (58. ábra). A B pontot a merőleges *talppontjának* nevezzük. Az AB szakasz hosszát pedig az *A pont távolságának az a egyenestől*.



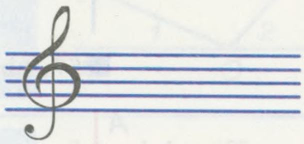
59. ábra



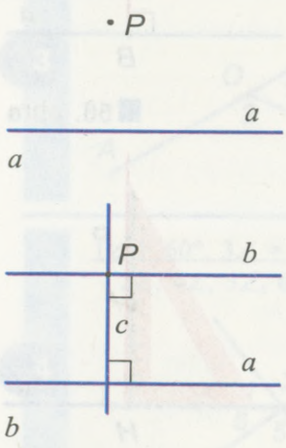
60. ábra



61. ábra



62. ábra



63. ábra

Bármely tetszőleges P ponton át mindig lehet merőlegest húzni az a egyenesre vagy derékszögű vonalzóval (59. ábra), esetleg szögmérővel (60. ábra). Később megtanulod, hogyan lehet merőlegest szerkeszteni körzővel és vonalzóval. Be lehet bizonyítani, hogy **csak egy merőleges húzható az adott ponton át az adott egyenesre.**

Nem minden egyenes metszi egymást. Különös figyelmet érdemelnek az egymást nem metsző egy síkban lévő egyenesek.

Két egyenest a síkon *párhuzamosnak* nevezünk, ha nem metszik egymást. Ha az a és b egyenes párhuzamos, akkor így jelöljük: $a \parallel b$ (61. ábra).

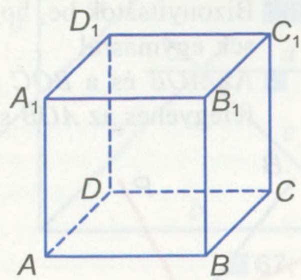
A párhuzamos egyenesekről elképzelést alkothatunk a füzet vízszintes vonalai, a kottafüzet ötös vonalazása, a téglatest ellentétes oldalélei alapján (62. ábra).

Két *szakasz* vagy két *félegyenes* akkor *párhuzamos*, ha párhuzamos egyenesekre illeszkednek. Például az $ABCD$ téglalap AB oldala párhuzamos a DC oldallal és $BC \parallel AD$.

Bármely, az egyeneshez nem tartozó P ponton át lehet az a egyenessel párhuzamos egyenest húzni (63. a ábra). Ehhez először a P ponton át húzzunk merőleges c egyenest az a egyenesre, majd a P ponton át merőleges b egyenest a c egyenesre (63. b ábra). Így $a \parallel b$. A rajzoláshoz használhatunk vonalzót és derékszögvonalzót is.

Hogy hogyan lehet vonalzóval és körzővel párhuzamos egyeneseket szerkeszteni, arról később lesz szó.

Érdeklődőknek



64. ábra

Bebizonyítható (próbáljátok meg), hogy ha a síkban fekvő két egyenes külön-külön merőleges egy harmadikra, akkor ez a két egyenes párhuzamos egymással. Tehát, ha $a \perp c$ és $b \perp c$, akkor $a \parallel b$.

De ha az a és a b nem egy síkhoz tartoznak, akkor ez az állítás már helytelen. Például az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka AB és BB_1 valamint B_1C_1 és BB_1 élei merőlegesek egymásra, azonban az AB és B_1C_1 egyenesek nem párhuzamosak (64. ábra).

A *paralel* szó görög eredetű. Jelentése egymás mellett. Ha arról beszélünk, hogy egy egyenes párhuzamos, feltétlenül meg kell nevezni, melyik egyenessel. Tehát a *párhuzamosság* az egyenesek egyik kölcsönös helyzete, relációja. Ez a reláció szimmetrikus, tehát ha $a \parallel b$, akkor $b \parallel a$. A merőlegesség és a szögek egyenlősége is reláció. Jelölésük: $\parallel$, $\perp$, $=$.

A későbbiekben a mértani alakzatok egyéb relációival is megismerkedtek majd.

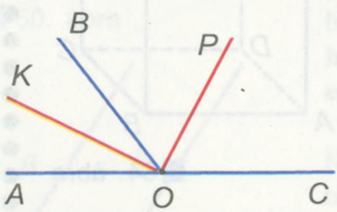
? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mit értünk két egyenes *hajlásszögén*?
2. Fogalmazzátok meg a merőleges egyenesek definícióját!
3. Milyen szakaszokat nevezünk merőlegesnek?
4. Mely egyenesek párhuzamosak?
5. Mely szakaszokat nevezünk párhuzamosnak?
6. Milyen eszközökkel tudtok egy adott ponton át az adott egyenesre merőleges egyenest húzni? Hogyan?
7. Hogyan kell az adott egyenessel párhuzamos egyenest húzni?

Oldjuk meg közösen!

1. Bizonyítsátok be, hogy a mellékszögek szögfelezői merőlegesek egymásra!

Az AOB és a BOC szögek mellékszögek (65. ábra). Az OK félegyenes az AOB szög, az OP pedig a $BOC\angle$ szögfelezője.



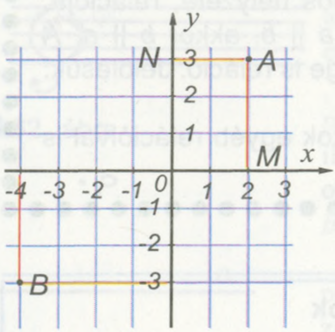
65. ábra

$KOP\angle = KOB\angle + BOP\angle$. Mivel az OK és OP félegyenesek szögfelezők, ezért $KOB\angle = \frac{1}{2}AOB\angle$ és $BOP\angle = \frac{1}{2}BOC\angle$.

Tehát $KOP\angle = \frac{1}{2}AOB\angle + \frac{1}{2}BOC\angle = \frac{1}{2}(AOB\angle + BOC\angle) = \frac{1}{2}AOC\angle = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.

Igazoltuk, hogy $OK \perp OP$.

2. Jelöljétek a koordinátasíkon az $A(2; 3)$ és $B(-4; -3)$ pontokat! Határozzátok meg a pontok távolságát a koordinátatengelyektől, ha az egységszakasz hossza 1 cm!



66. ábra

Az A és B pontokból húzzunk merőlegeseket a koordinátatengelyekre (66. ábra). Az AM szakasz hossza adja meg az A pont távolságát az OX tengelytől, az AN szakasz hossza pedig a pont távolságát az OY tengelytől. A rajzról leolvasható, hogy $AM = 3$ cm és $AN = 2$cm.

Hasonló elvek alapján a B pont távolsága a megfelelő koordinátatengelyektől 3 cm és 4 cm.

Felelet: Az A ponttól – 3 cm és 2 cm, a B ponttól – 3cm és 4 cm!

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

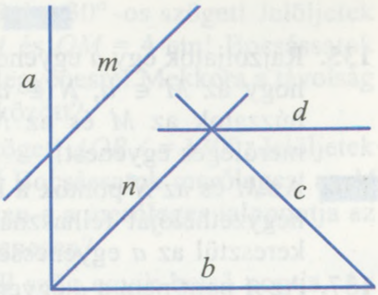
OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

131. Környezetedből hozz fel példákat:

a) merőleges egyenesekre;

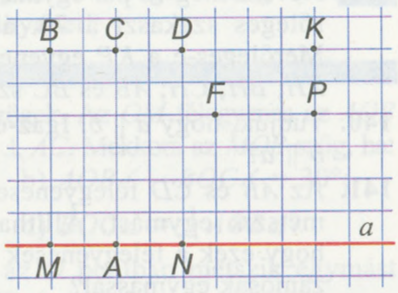
b) párhuzamos egyenesekre!

132. A 67. ábrán látható egyenesek közül melyek:
a) merőlegesek;
b) párhuzamosak?



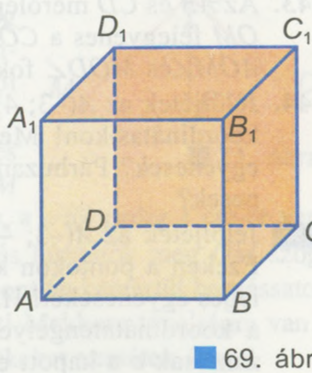
67. ábra

133. A 68. ábrán látható rajz alapján nevezd meg:
1) azt a pontot, melyen átmegy:
a) az A ponton átmenő, az a egyenesre merőleges egyenes;
b) a D ponton átmenő, az a egyenesre merőleges egyenes;
c) az F ponton átmenő, az a egyenessel párhuzamos egyenes;
d) a K ponton átmenő, az a egyenessel párhuzamos egyenes!
2) Az alábbi állítások közül melyik igaz:
a) $AB \perp a$; b) $BM \perp a$;
c) $KP \perp a$; d) $FK \parallel a$;
e) $BC \parallel a$; f) $KP \parallel a$?



68. ábra

134. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest (69. ábra).
1) Nevezzétek meg a rajz alapján:
a) az AA_1 egyenessel párhuzamos egyenest;
b) az AD egyenessel párhuzamos egyenest;
c) merőleges az AA_1 egyenesre;
d) merőleges az AD egyenesre!
2) Az alábbi állítások közül melyik igaz:
$AA_1 \perp AD$; $B_1C_1 \perp A_1B_1$;
$DC \perp AB$; $A_1D_1 \parallel AD$;
$CD \parallel C_1D_1$; $DD_1 \parallel A_1D_1$;
$CD \parallel AB$?



69. ábra

A

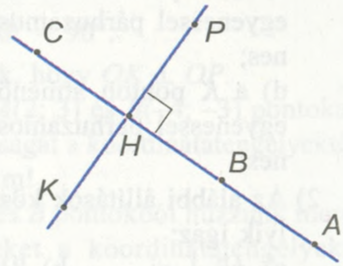
135. Rajzoljatok egy a egyenest! Vegyetek fel két M és N pontot úgy, hogy az $M \in a$, $N \notin a$. A füzet négyzethálóját felhasználva húzzatok az M és az N pontokon keresztül az a egyenesre merőleges egyenest!

136. Az M és az N pontok a különböző félsíkokban vannak. A füzet négyzethálóját felhasználva húzzatok az M és az N pontokon keresztül az a egyenessel párhuzamos egyenest!

137. Az A pont nem a c egyenesen fekszik. Hány merőleges egyenes bocsátható az A ponton keresztül a c egyenesre? Miért?

138. A K pont nem az a egyenesen fekszik. Derékszögű vonalzó segítségével bocsássatok az A ponton keresztül merőleges egyenest az a egyenesre!

139. Nevezz meg 10 pár egymásra merőleges szakaszt a 70. ábráról! Merőleges-e a KP egyenesre: az AH; BH; CH; AB és BC szakasz?



70. ábra

140. Tudjuk, hogy $a \parallel b$. Igaz-e, hogy $b \parallel a$?

141. Az AB és CD félegyenesek nem metszik egymást. Állíthatjuk-e, hogy ezek a félegyenesek párhuzamosak egymással?

142. A 67. ábra alapján tegyétek ki a megfelelő $\parallel$, $\perp$, jelet az alábbi egyenesek közé:

a) $a \ldots b$; b) $m \ldots n$; c) $n \ldots c$;
d) $a \ldots d$; e) $m \ldots c$; f) $b \ldots d$!

143. Az AB és CD merőleges egyenesek metszéspontja az O pont. Az OM félegyenes a COB szög szögfelezője. Határozzátok meg az $AOM\angle$és $MOD\angle$ fokmértékét!

144. Jelöljétek az $A(-3; 4)$, $B(1; 8)$, $C(4; 5)$ és $D(-2; -1)$ pontokat a koordinátasíkon! Merőlegesek-e az AD és DC, az AB és BC egyenesek? Párhuzamosak-e az AB és CD, az AD és BC egyenesek?

145. Jelöljétek az $A(-3; -1)$ és $B(2; 4)$ pontokat a koordinátasíkon! Ezeken a pontokon keresztül húzzatok az AB egyenesre merőleges egyeneseket! Határozzátok meg a megrajzolt egyenesek és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit! Párhuzamosak-e a kapott egyenesek?

146. Szögmérővel rajzoljatok egy $AOB\angle = 30°$ -os szöget! Jelöljetek egy M pontot úgy, hogy $M \in OA$ és $OM = 4$ cm! Bocsássatok merőlegest az M pontból az OB félegyenesre! Mekkora a távolság az M pont és az OB félegyenes között?

147. Szögmérővel rajzoljatok 30°-os szöget! $AOB\angle = 130°$. Jelöljetek egy M pontot úgy, hogy $M \in OA$! Bocsássatok merőlegest az M pontból az OB egyenesre! Rajta van-e a merőleges talppontja az OB félegyenesen? És az OB egyenesen?

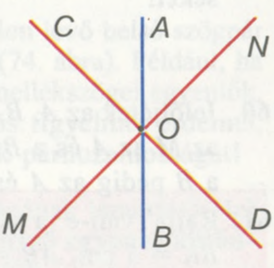
148. $AOB\angle = 90°$. Az M pont az AOB szög egyik belső pontja. Az M ponton keresztül húzzatok a szög száraival párhuzamos egyeneseket! Bizonyosodjatok meg arról, hogy az így kapott egyenesek merőlegesek!

149. $AOB\angle = 90°$. Az M pont az AOB szög szögfelezőjének egyik pontja. Határozzátok meg az M pont távolságát a szög száraitól! Vessétek össze a kapott eredményeket!

B

150. Az AOB és BOC szögek mellékszögek. Az OM félegyenes az AOB szög egyik belső félegyenese. $OM \perp AC$. Mekkora az MOB szög, ha:
a) $BOC\angle = 40°$; b) $AOB\angle - BOC\angle = 30°$;
c) $AOB\angle : BOC\angle = 3 : 2$; d) $BOC\angle = \frac{1}{3} AOB\angle$?

151. Az AB, CD és MN egyenesek az O pontban metszik egymást (71. ábra). Igazoljátok, hogy $CD \perp MN$, ha:
a) $AOM\angle = 130°$, $COB\angle = 140°$;
b) $COM\angle = AOC\angle + MOB\angle$;
c) $AOM\angle = 135°$, OB az MOD szög szögfelezője!



71. ábra

152. $AOB\angle = 90°$. Jelöljetek az AOB szög belső tartományában egy olyan M pontot, amely a szög mindkét szárától 2 cm-re lesz!

153. Rajzoljatok két egymásra merőleges a és c egyenest! Vegyetek fel egy olyan M pontot, amely az a egyenestől 3 cm-re, a c-től pedig 1 cm-re van!

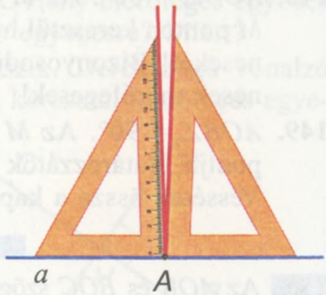
154. Rajzoljatok egy 80°-os AOB szöget, és húzzátok meg OM szögfelezőjét! A szögfelező tetszőleges K pontján keresztül bocsássatok a szög száraira merőleges egyeneseket! Mekkora távolságra van a K pont a szög száraitól? A kapott értékeket vessétek össze!

155. Oldjátok meg az előző feladatot, ha $AOB\angle = 60°$; $AOB\angle = 90°$; $AOB\angle = 130°$! Fogalmazzátok meg sejtéseiteket a szögfelező bármelyik pontja és a szög szárai közötti távolságról!

156. Rajzoljatok egy 60°-os AOB szöget! Húzzátok meg az OM szögfelezőjét! A szögfelező tetszőleges K pontján át bocsássatok merőleges EF egyenest a szögfelezőre! Hasonlítsátok össze az OE és OF szakaszok hosszát, ha $E\in OA$ és $F\in OB$!

157. Oldjátok meg az előző feladatot, ha $AOB\angle = 80°$; $AOB\angle = 90°$; $AOB\angle = 120°$! Fogalmazzátok meg a szögfelezőre merőleges egyenes tulajdonságát!

158. Az a egyeneshez tartozó A ponton át az egyik tanuló a derékszögű vonalzó egyik oldala mentén merőlegest húzott, majd megfordította a vonalzóját és még egy merőlegest tudott húzni (72. ábra). Mit mondhatunk el egy ilyen vonalzóról?



72. ábra

GYAKORLATI FELADAT

159. Hajtogatással állítsatok elő párhuzamos és merőleges egyeneseket!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

160. Jelöljétek az A, B, C, D és M pontokat az a egyenesen úgy, hogy az M az A és a B pontok között legyen, a C a B és a D között, a B pedig az A és a D között!

161. Rajta van-e a K pont az AB szakaszon, ha $AK = 3$ cm, $BK = 5$ cm, $AB = 7$ cm?

162. Mekkorák azok a mellékszögek, melyek aránya:

a) $1 : 2$; b) $1 : 4$; c) $4 : 5$; d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$?

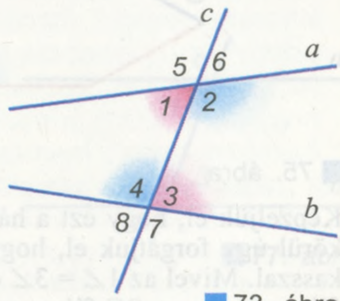
163. Egy négyszög kerülete P. Határozzátok meg az oldalak hosszát, ha azok aránya:

a) $1 : 2 : 3 : 4$; b) $3 : 5 : 3 : 7$; c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1$!

6. §. *Az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjelei*

A párhuzamos egyenesek tulajdonságainak vizsgálatában fontos szerepet játszik a metsző egyenes fogalma és néhány nevezetes szögpár.

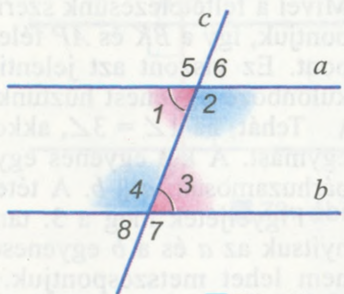
Az *a* és *b* egyeneseket metsző *c* egyenest az adott egyenesek *metsző egyenesének* nevezzük (73. ábra).



73. ábra

Az *a* és a *b* egyenesek a metsző egyenessel nyolc szöget alkotnak. A 73. ábrán ezeket a szögeket megszámoztuk. Ezen szögek közül néhány szögpárnak külön neve van:

- *különböző oldalon fekvő belső szögek: 1 és 3, 2 és 4;*
- *egy oldalon lévő belső szögek:* 1 és 4; 2 és 3;
- *különböző oldalon fekvő külső szögek:* 7 és 5, 8 és 6;
- *egy oldalon lévő külső szögek:* 5 és 8, 7 és 6;
- *megfelelő szögek:* 5 és 4, 6 és 3, 1 és 8, 2 és 7.



74. ábra

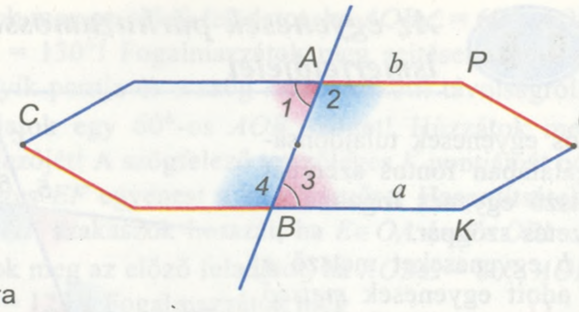
Figyeljétek meg! Ha az egyik különböző oldalon lévő belső szögpár egyenlő, akkor a másik ilyen szögpár is egyenlő (74. ábra). Például, ha $1\angle = 3\angle$, akkor $2\angle = 4\angle$, mert egyenlő szögek mellékszögei egyenlők.

A rajzról is látható, hogy ez az eset különös figyelmet érdemel, mert ez a feltétel biztosítja az *a* és *b* egyenesek párhuzamosságát!

! **3. tantétel.** (az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele) **Két egyenes akkor párhuzamos, ha a metsző egyenes különböző oldalain fekvő belső szögek egyenlők.**

BIZONYÍTÁS.

Legyen két *a* és *b* egyenes, amelyeket metszünk egy harmadik *AB* egyenessel. A keletkező különböző oldalon fekvő belső szögek egyenlők: $1\angle = 3\angle$. De akkor, ahogy már igazoltuk, $2\angle = 4\angle$. Tételezzük fel, hogy az *a* és a *b* egyenesek metszik egymást egy *C* pontban. Egy *ABC* háromszöget kapunk (a 75. ábrán vázlatosan ötszögként rajzoltuk).



75. ábra

Képzeljük el, hogy ezt a háromszöget az AB szakasz O felezőpontja körül úgy forgatjuk el, hogy az OA szakasz egybeessen az OB szakasszal. Mivel az $1\angle = 3\angle$ és $2\angle = 4\angle$, ezért az AC félegyenes a BK félegyenesre, a BC félegyenes pedig az AP félegyenesre illeszkedik. Mivel a feltételezésünk szerint az AC és BC egyeneseknek a C közös pontjuk, így a BK és AP félegyeneseknek is van közös pontja, egy C_1 pont. Ez viszont azt jelenti, hogy két, a C és a C_1 ponton át két különböző egyenest húztunk. Ami nem lehetséges.

Tehát, ha $1\angle = 3\angle$, akkor az a és a b egyenesek nem metszhetik egymást. A két egyenes egy síkban van, nincs közös pontjuk, ezért párhuzamosak: $a \parallel b$. A tételt bebizonyítottuk.□

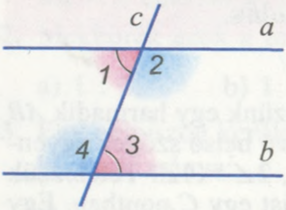
Figyeljétek meg a 3. tantétel bizonyítását. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk az a és a b egyenesek párhuzamosságát, azt igazoltuk, hogy nem lehet metszéspontjuk. Vagyis feltételeztük eredeti állításunk ellenkezőjét, majd ellentmondásra jutottunk. Az ilyen bizonyítási eljárást *indirekt bizonyításnak* nevezzük.

A 3. tantétel alapján néhány másik ismertetőjel is igazolható.

! **4. tantétel. Két egyenes akkor párhuzamos, ha a metsző egyenes egy oldalain fekvő belső szögek összege 180°.**

BIZONYÍTÁS.

Használjuk fel a 76. ábra jelölését és tételezzük fel, hogy az egy oldalon fekvő belső szögek összege $1\angle + 4\angle = 180°$. De a $3\angle$ és a $4\angle$ összege is 180°, mert ezek a szögek mellékszögek. Ezért $1\angle = 3\angle$. Ezek a szögek viszont már különböző oldalon fekvő belső szögek. Azonban, ha ezek egyenlők, akkor az előző tétel alapján az a és a b egyenesek párhuzamosak.□

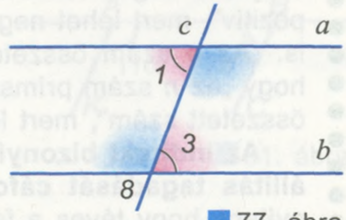


76. ábra

! 5. tantétel. Két egyenes akkor párhuzamos, ha a metsző egyenes különböző oldalain fekvő váltószögek egyenlők.

BIZONYÍTÁS.

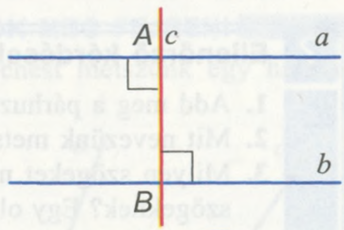
Az *a* és *b* egyenest a *c* egyenes úgy metszi, hogy az egyállású (1 és 8) szögeik egyenlők (77. ábra). A $8\angle = 3\angle$, mert csúcsszögek. De ha az $1\angle = 8\angle$ és $8\angle = 3\angle$, akkor $1\angle = 3\angle$. Ebből következik, hogy $a \parallel b$. □



77. ábra

Jegyezzük ennek a 3. tantétel egyik következményét!

! Ha két egyenes merőleges egy harmadikra, akkor párhuzamos egymással.

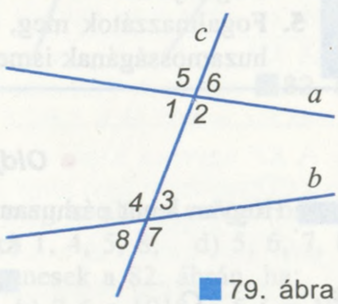


78. ábra

Mivel mindkét *a* és *b* egyenes merőleges a *c* egyenesre, így a különböző oldalon fekvő belső szögek egyenlők, mert derékszögek. Vagyis az *a* és *b* egyenes párhuzamos (78. ábra).

Érdeklődőknek

A 7 és 5, 8 és 6 szögeket *különböző oldalon fekvő külső* szögeknek, az 5 és 8, 7 és 6 szögeket pedig *egy oldalon lévő külső* szögeknek nevezzük (79. ábra). Ezen fogalmak alapján próbáljatok még két ismertetőjelet leírni és bebizonyítani.



79. ábra

Hasznos az indirekt bizonyítás alapelvét jól elsajátítani.

Ha az *A* állítás a *B* tagadása, akkor az ilyeneket *ellentétes állításoknak* nevezzük. Két kölcsönösen ellentétes állítás közül csak az egyik lehet igaz, a másik hamis. Tehát ha az *A* állítás a *B* állítás tagadása, és a *B* állítás hamis, akkor az *A* állítás biztosan igaz.

Figyeljünk oda mit is jelent egy állítás tagadása. Például, ha a számkifejezések témakörét, vagy a természetes számok oszthatóságát választom, akkor annak az állításnak, hogy „az A kifejezés pozitív" nem az a tagadása, hogy az „az A kifejezés negatív", hanem az, hogy az „az A kifejezés nem pozitív", mert lehet negatív szám és lehet egyenlő nullával is. „Az n szám összetett szám" állítás tagadása nem az, hogy „az n szám prímszám", hanem hogy „az n szám nem összetett szám", mert lehet prímszám, de lehet 1 is.

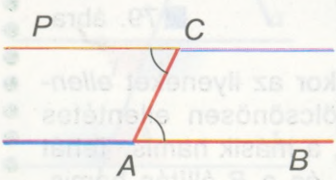
Az indirekt bizonyítás olyan eljárás, amikor az adott állítás tagadását cáfoljuk. Cáfolni annyi jelent: bebizonyítani, hogy téves a feltételezés.

? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Add meg a párhuzamos egyenesek meghatározását!
2. Mit nevezünk metsző egyenesnek?
3. Milyen szögeket nevezünk különböző oldalon fekvő belső szögeknek? Egy oldalon lévő belső szögeknek? Mutassátok meg rajzon!
4. Milyen szögeket nevezünk különböző oldalon fekvő külső szögeknek? Egy oldalon lévő külső szögeknek? Mutassátok meg rajzon!
5. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelét!

Oldjuk meg közösen!

1. Hogyan lehet párhuzamos egyeneseket rajzolni vonalzóval és szögmérővel?

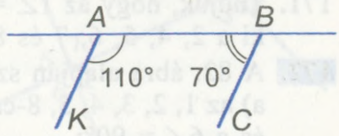


80. ábra

Rajzolunk egy tetszőleges AB félegyenest. Ráмérjük az egyenlő BAC és ACP szögeket, úgy ahogy azt a 80. ábra mutatja. Az AB és a CP egyenesek párhuzamosak, mivel a különböző oldalon fekvő belső szögek (a BAC és ACP szögek) egyenlők.

2. Az AB szakasz végpontjaiból, a szakasztól egy irányba egy AK és egy BC félegyenest húztak úgy, hogy $KAB\angle = 110°$, $ABC\angle = 70°$. Párhuzamosak-e ezek a félegyenesek?

Az AB egyenes az AK és BC metsző egyenesei (81. ábra). A KAB és az ABC szögek egy oldalon fekvő belső szögek. Mivel az összegük: $110° + 70° = 180°$, így a 4. tétel alapján az AK és a BC egyenesek párhuzamosak, tehát az AK és AB félegyenesek is párhuzamosak.



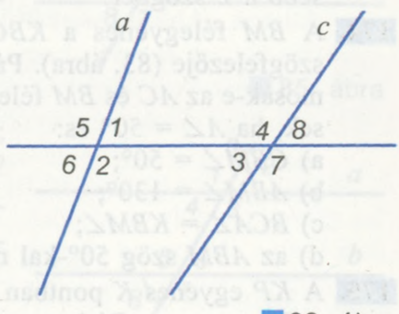
81. ábra

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

164. Hány szög keletkezik, ha két egyenest metszünk egy harmadikkal?

165. Figyeljétek meg a 82. ábrát és nevezzétek meg:
a) különböző oldalon fekvő belső szögpárokat;
b) egy oldalon fekvő belső szögpárokat;
c) különböző oldalon fekvő külső szögpárokat;
d) egy oldalon fekvő külső szögpárokat;
e) megfelelő szögeket;
f) mellékszögeket;
g) csúcsszögeket!



82. ábra

166. A 82. ábra alapján határozzátok meg az alábbi szögek összegét:
a) 1, 2, 3, 4; b) 1, 3, 5, 7; c) 1, 4, 5, 8; d) 5, 6, 7, 8!

167. Párhuzamosak-e az a és a c egyenesek a 82. ábrán, ha:
a) $6\angle = 8\angle$; b) $7\angle = 101°$ és $5\angle = 101°$;
c) $5\angle + 8\angle = 180°$; d) $1\angle + 7\angle = 180°$?

168. Milyen az a és a b egyenes kölcsönös helyzete, ha $a \perp c$, $b \perp c$ és mind a három egyenes egy síkban fekszik?

169. Milyen az a és a b egyenes kölcsönös helyzete a térben, ha $a \perp c$, $b \perp c$?

A

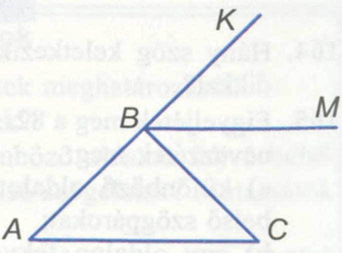
170. Nevezzétek meg az alábbi szögpárokat (82. ábra):
a) $1\angle$ és $5\angle$; b) $7\angle$ és $2\angle$; c) $2\angle$ és $3\angle$;
d) $6\angle$ és $3\angle$; e) $3\angle$ és $1\angle$; f) $8\angle$ és $5\angle$!

171. Tudjuk, hogy az $1\angle = 87°$ és $3\angle = 78°$ (82. ábra). Számítsátok ki a 2, 4, 5, 6, 7 és 8-cal jelölt szögek fokmértékét!

172. A 82. ábra alapján számítsátok ki:
a) az 1, 2, 3, 4, 5, 8-cal jelölt szögek fokmértékét, ha $7\angle = 100°$ és a $6\angle = 90°$;
b) $1\angle + 4\angle$ és $2\angle + 3\angle$, ha $5\angle + 8\angle = 170°$;
c) $4\angle - 5\angle$, ha $4\angle - 2\angle = 10°$!

173. Párhuzamosak-e a 82. ábrán az *a* és a *c* egyenesek, ha:
a) $1\angle = 50°$, $7\angle = 130°$;
b) $6\angle = 65°$, $8\angle = 115°$;
c) $1\angle + 7\angle = 180°$;
d) $2\angle = 140°$, a $3\angle$ 80°-kal kisebb a 2 szögnél?

174. A *BM* félegyenes a *KBC* szög szögfelezője (83. ábra). Párhuzamosak-e az *AC* és *BM* félegyenesek, ha $A\angle = 50°$ és:
a) $CBM\angle = 50°$;
b) $ABM\angle = 130°$;
c) $BCA\angle = KBM\angle$;
d) az *ABM* szög 50°-kal nagyobb a *CBA* szögnél?



83. ábra

175. A *KP* egyenes *K* pontban metszi az *AB* egyenest és *P* pontban a *CD* egyenest. Párhuzamosak-e az *AB* és *CD* egyenesek, ha az $AKP\angle = 90°$ és a $KPC\angle = 90°$?

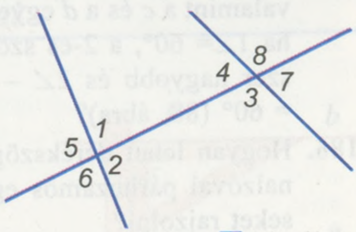
176. A *KP* egyenes *K* pontban metszi az *AB* egyenest és *P* pontban a *CD* egyenest úgy, hogy a *B* és a *D* pontok a *KP* egyenestől egy oldalra esnek. Párhuzamosak-e az *AB* és *CD* egyenesek, ha a $BKP\angle = 89°39'$ és a $KPD\angle = 90°21'$?

177. Az *AB* szakasz végpontjaiból, a szakasztól egy irányba egy *AP* és egy *BC* félegyenest húztak. Párhuzamosak-e ezek a félegyenesek, ha:
a) $PAB\angle = 105°$, $ABC\angle = 75°$;
b) $PAB\angle = 93°$, $ABC\angle = 87°$?

178. Bizonyítsátok be, hogy a téglalap szemben fekvő oldalai párhuzamosak!

B

179. Az a és b egyeneseket egy c egyenessel metszettük. A keletkezett hegyesszögek egyenlők. Következik-e ebből, hogy $a \parallel b$?



84. ábra

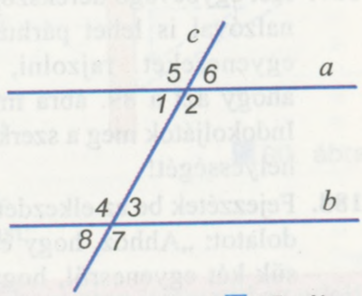
180. Határozzátok meg a 84. ábrán látható 1-es és 2-es szögek fokmértékét, ha ismert, hogy $1\angle + 4\angle = 160°$ és:

a) a 4-es szög 20°-kal kisebb az 1-es szögnél;

b) a 2-es szög 2-szer nagyobb az 1-es szögnél;

c) $4\angle : 2\angle = 2 : 3$;

d) a 4-es szög a 2-es szög 60%-a!



85. ábra

181. Párhuzamosak-e a 85. ábrán látható a és b egyenesek, ha:

a) $4\angle - 1\angle = 30°$ és $3\angle = 75°$;

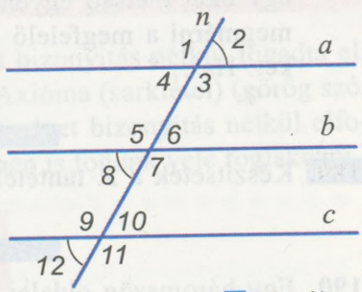
b) $1\angle = 60°$ és $2\angle : 3\angle = 2 : 1$?

182. Határozzátok meg a 86. ábrán látható a, b és c egyenesek kölcsönös helyzetét, ha:

a) $3\angle = 5\angle = 9\angle$;

b) $2\angle = 8\angle$ és $7\angle = 9\angle$;

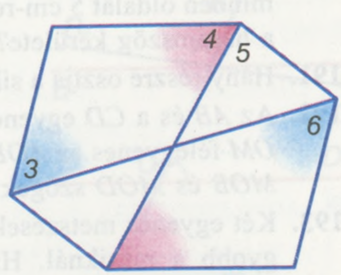
c) $12\angle = 8\angle$ és $6\angle + 3\angle = 180°$!



86. ábra

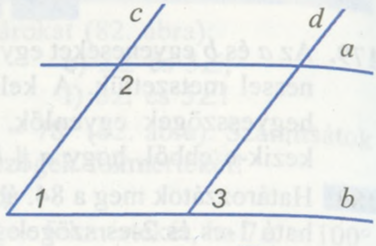
183. Az a, b és c egyeneseket az n egyenes a 86. ábrán látható módon metszi. $2\angle = 8\angle = 12\angle$. Bizonyítsátok be, hogy az a, b és c egyenesek páronként párhuzamosak!

184. A 87. ábrán egy hatszög látható. $1\angle = 4\angle$, $2\angle = 5\angle$ és $3\angle = 6\angle$. Bizonyítsátok be, hogy a hatszög szemközti oldalai párhuzamosak!



87. ábra

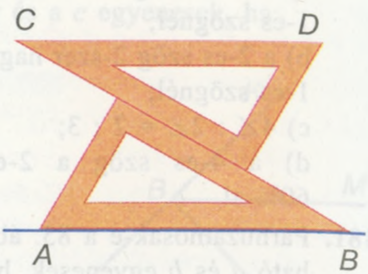
185. Párhuzamosak-e az *a* és a *b*, valamint a *c* és a *d* egyenesek, ha $1\angle = 60°$, a 2-es szög kétszer nagyobb és $2\angle - 3\angle = 60°$ (88. ábra)?



88. ábra

186. Hogyan lehet derékszögű vonalzóval párhuzamos egyeneseket rajzolni?

187. Két egybevágó derékszögű vonalzóval is lehet párhuzamos egyeneseket rajzolni, mint ahogy azt a 89. ábra mutatja. Indokoljátok meg a szerkesztés helyességét!



89. ábra

188. Fejezzétek be az elkezdett gondolatot: „Ahhoz, hogy eldöntsük két egyenesről, hogy párhuzamosak-e, meg kell húzni egy őket metsző egyenest, és megmérni a megfelelő szögeket. Ha …"

GYAKORLATI FELADAT

189. Készítsetek a 3. tantétel igazolásához szemléltető eszközt!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

190. Egy háromszög oldalai 12 cm, 15 cm és 18 cm. A háromszög minden oldalát 5 cm-rel csökkentették. Hányad részére csökkent a háromszög kerülete?

191. Hány részre osztja a síkot egy körlap és egy azt metsző egyenes?

192. Az *AB* és a *CD* egyenesek egy *O* pontban metszik egymást. Az *OM* félegyenes az *AOB* szög szögfelezője. Határozzátok meg az *MOB* és *MOD* szögek fokmértékét, ha $COB\angle = 70°$!

193. Két egyenes metszésekor keletkezett szögek egyike 90°-kal nagyobb a másiknál. Hányszor nagyobb ez a szög a kisebbik szögnél?

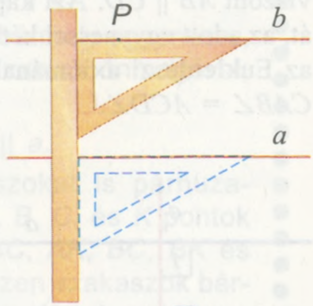
7. §. A párhuzamos egyenesek tulajdonságai

Feladat

Húzzatok az *a* egyessel párhuzamos egyenest a rajta kívül fekvő *P* ponton át!

A 90. ábrán láthatjátok a feladat megoldását derékszögű és kétélű vonalzóval.

Lehet-e a *P* ponton át az *a* egyenessel párhuzamosan két egyenest húzni?



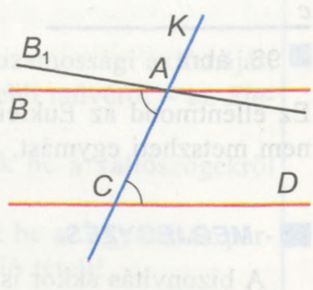
90. ábra

A mértanban járatos tudósok már régóta igaznak tartották a következő állítást:

> ! **Egy egyenesen kívül fekvő bármely ponton keresztül az adott egyenessel egy és csakis egy párhuzamos egyenes húzható.**

Az ógörög Eukleidész ezt az állítást bizonyítás nélkül fogadta el, ezért *Eukleidész axiómájának* nevezik. Axióma (sarktétel) (görög szó, jelentése tekintély) olyan alapigazság, melyet bizonyítás nélkül elfogadunk. (A következő fejezetben bővebben is fogunk vele foglalkozni.)

> ! **6. tantétel.** (a harmadik tétel fordított tétele)
> **Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor a különböző oldalon fekvő belső szögek (váltószögek) egyenlők.**

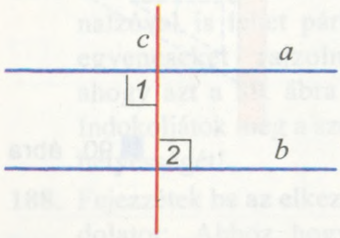


91. ábra

BIZONYÍTÁS.

Az AB és CD párhuzamos egyeneseket metszi a KC egyenes (91. ábra). Igazoljuk, hogy $CAB\angle = ACD\angle$.

Alkalmazzunk indirekt bizonyítást. tételezzük fel az ellenkezőjét, tehát $CAB\angle \neq ACD\angle$. Húzzunk egy egyenest úgy, hogy a $CAB_1\angle = ACD\angle$ egyenlőség teljesüljön. De akkor viszont a párhuzamos egyenesek ismertetőjele alapján $AB_1 \parallel CD$, a feladat feltételei alapján viszont $AB \parallel CD$. Azt kaptuk, hogy az egyenesen kívül fekvő ponton át, az adott egyenessel két párhuzamos egyenes húzható. Ez ellentmond az Eukleidészi axiómának. Tehát a feltételezésünk helytelen, vagyis $CAB\angle = ACD\angle$.□



92. ábra

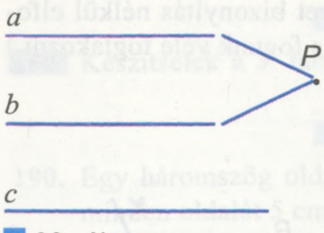
KÖVETKEZMÉNY.

Ha egy egyenes merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre, akkor merőleges a másik egyenesre is.

Ha $c \perp a$ és $a \parallel b$, akkor $1\angle = 2\angle = 90°$, vagyis $c \perp b$ (92. ábra).

Fogalmazzátok meg és bizonyítsátok be a 4. és 5. tétel fordított tételét!

! **7. tantétel. Ha két egyenes mindegyike egy harmadikkal párhuzamos, akkor a két egyenes egymással is párhuzamos.**



93. ábra

BIZONYÍTÁS.

Legyen az a és a b egyenes párhuzamos a c egyenessel.

Tegyük fel, hogy az a egyenes metszi a b egyenest valamely P pontban (93. ábra). Ez azt jelenti, hogy a P ponton keresztül a c egyenessel párhuzamosan két különböző a és b egyenes megy át. Ez ellentmond az Eukleidészi axiómának. Tehát az a és b egyenes nem metszheti egymást, így párhuzamosak. □

MEGJEGYZÉS.

A bizonyítás akkor is helytálló, ha a c egyenes az a és b egyenes között van.

Érdeklődőknek

Az utolsó tantétel a párhuzamosság *tranzitivitását* mondja ki (*transitivus* – latin szó, ami átvihetőséget jelent):

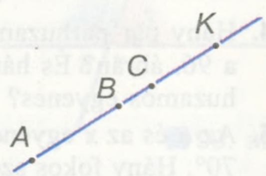
ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$, akkor $a \parallel c$.

Ahhoz, hogy ez az állítás igaz legyen bármely egyenesre, elfogadták, hogy minden egyenes párhuzamos önmagával, $a \parallel a$, tehát ha:

$a \parallel b$ és $b \parallel a$, akkor $a \parallel a$.

Az egy egyeneshez tartozó szakaszokat is párhuzamosaknak fogadjuk el. Például, ha az *A*, *B*, *C*, és *K* pontok egy egyenesen vannak, akkor az *AB*, *AC*, *AK*, *BC*, *BK* és *CK* szakaszok mindegyike párhuzamos ezen szakaszok bármelyikével (94. ábra). Ennek a megegyezésnek a célszerűségéről a párhuzamos eltolás és párhuzamos vetítés témakörök tanulásakor fogtok majd meggyőződni. De ebben az évben a nem egy egyeneshez tartozó szakaszok és félegyenesek párhuzamosságával fogunk foglalkozni.

Létezik olyan mértan is, ahol az eukleidészi axiómát nem fogadják el. Ez a nemeuklideszi geometria, mint például a Bolyai János, Lobacsevszkij által kidolgozott mértan (lásd a 195. oldalt).



94. ábra

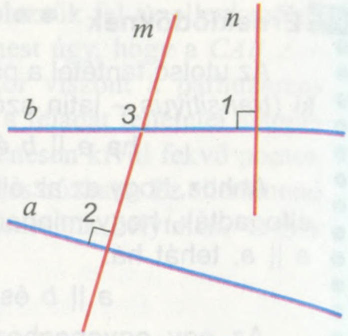
Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Fogalmazzátok meg Eukleidész párhuzamossági axiómáját!
2. Mit tudtok Eukleidészről és leghíresebb művéről – az *Elemek*ről?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a váltószögekről szóló tételt!
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az egyenesek párhuzamosságának tranzitivitásáról szóló tételt!
5. Mi az indirekt bizonyítási módszer?

• Oldjuk meg közösen!

Bizonyítsátok be, hogy két nem párhuzamos egyenesre merőleges egyenesek metszik egymást!

Legyen, hogy az a és b egyenesek metsző egyenesek, az m és az n egyenesek pedig rájuk merőlegesek: $m \perp a$, $n \perp b$ (95. ábra). Ezért $1\angle = 2\angle = 90°$. Tegyük fel, hogy $m \parallel n$, de akkor $1\angle = 3\angle$. Vagyis $2\angle = 3\angle$. Ha viszont $2\angle = 3\angle$, akkor az a és a b egyenes párhuzamos, ami ellentmond a feladat feltételeinek. Tehát az m és az n egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, tehát metszik egymást.



95. ábra

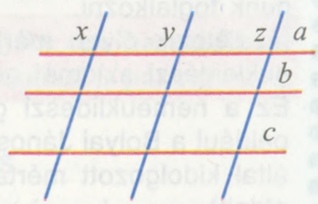
FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

194. Hány pár párhuzamos egyenes van a 96. ábrán? És hány pár nem párhuzamos egyenes?

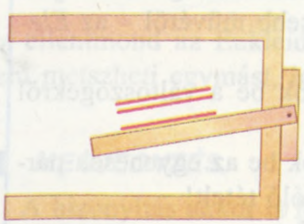
195. Az a és az x egyenesek hajlásszöge 70°. Hány fokos szöget zárnak be a 96. ábrán látható egyenesek?

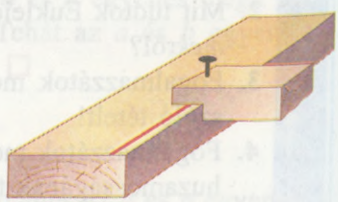
196. Magyarázd el, hogyan lehet párhuzamos egyeneseket húzni fejes vonalzóval (97. ábra)!



96. ábra

197. A 98. ábrán egy saját készítésű párhuzamíró látható. Hogyan lehet egy ilyen párhuzamíróval egy fahasábra az élével párhuzamos egyenest húzni?


97. ábra


98. ábra

A

198. Két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor az egyik szög fokmértéke 35°. Határozzátok meg a többi szög fokmértékét!

199. Az ABC szög BA szárán felvettek egy M pontot. Az M ponton keresztül párhuzamos egyenest húztak a BC szárral! Határozzátok meg az M csúcsnál lévő szögek fokmértékét, ha $ABC = 50°$!

200. Bizonyítsátok be, hogy ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor:

a) a megfelelő szögek, melyeket egyállású szögeknek nevezünk, egyenlők;

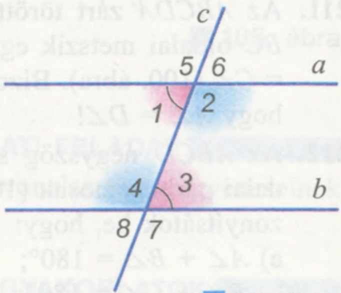
b) az egy oldalon fekvő belső szögek (társszögek) összege 180°!

201. Határozzátok meg a 99. ábrán látható összes szög fokmértékét, ha $a \parallel b$ és:

a) $1\angle = 60°$;

b) $5\angle + 7\angle = 250°$;

c) $2\angle - 1\angle = 50°$!



99. ábra

202. Bizonyítsátok be, hogy ha egy egyenes metszi két párhuzamos egyenes közül az egyiket, akkor metszi a másikat is!

203. Az a és a b egyenes nem párhuzamos a c egyenessel. Következik-e ebből, hogy az a és b egyenesek nem párhuzamosak?

204. Bizonyítsátok be, hogy az egyállású szögek szögfelezői párhuzamosak!

205. Bizonyítsátok be, hogy ha két egyenest metszünk egy harmadikkal és a megfelelő szögek egyenlők, akkor bármelyik másik metsző egyenes esetében is egyenlők lesznek a megfelelő szögek!

206. A metsző egyenes és a párhuzamos egyenesek közötti egyik szög 80°-os. Hány fokos szög alatt metszi ennek a szögnek a szögfelezője a másik egyenest?

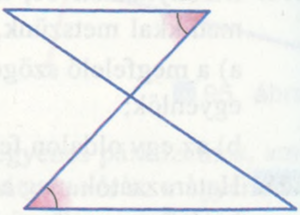
207. Az ABC háromszög AB és BC oldalain felvettek egy K és egy P pontot úgy, hogy $KP \parallel AC$. Határozzátok meg az $AKPC$ négyszög szögeit, ha $BKP\angle = 60°$, $BPK\angle = 80°$!

B

208. Ha két egyenes és a metsző egyenes által bezárt egyállású szögek nem egyenlők, akkor a két egyenes metszi egymást. Bizonyítsátok be ezt az állítást!

209. Az AB, AC és KP félegyenesekre igaz az, hogy $KP \parallel AB$ és $KP \parallel AC$. Határozzátok meg a BAC szög fokmértékét!

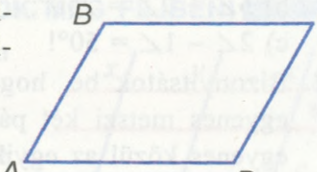
210. A 99. ábra alapján határozzátok meg a 3-as és a 4-es szög fokmértékét, ha $1\angle = 3\angle$ és:
a) $4\angle - 1\angle = 50°$;
b) a 4-es szög 3-szor nagyobb a 6-os szögnél!



100. ábra

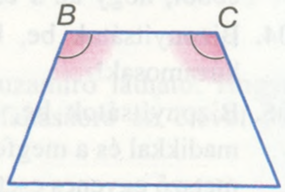
211. Az $ABCDA$ zárt töröttvonal AD és BC oldalai metszik egymást. $B\angle = C\angle$ (100. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $A\angle = D\angle$!

212. Az $ABCD$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak (101. ábra). Bizonyítsátok be, hogy:
a) $A\angle + B\angle = 180°$;
b) $B\angle + C\angle = 180°$;
c) $A\angle = C\angle$;
d) $B\angle = D\angle$!



101. ábra

213. Az $ABCD$ négyszög BC és AD oldalai párhuzamosak, $B\angle = C\angle$ (102. ábra). Bizonyítsátok be, hogy:
a) $A\angle = D\angle$;
b) $A\angle + B\angle = 180°$!

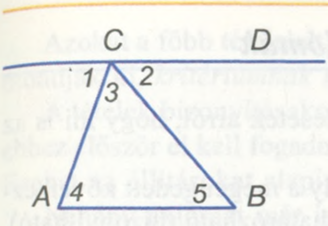


102. ábra

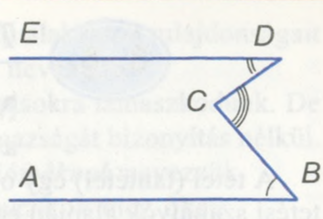
214. Az a egyenesen kívül lévő ponton át három különböző egyenest húztak. Bizonyítsátok be, hogy legalább kettő közülük metszi az a egyenest!

215*. Bizonyítsátok be, **hogy a párhuzamos szárú szögek vagy egyenlők, vagy összegük 180°!**

216. A 103. ábrán az $1\angle = 70°$, $2\angle = 50°$ és $AB \parallel CD$. Határozzátok meg a 3-as, 4-es és 5-ös szögek fokmértékét!



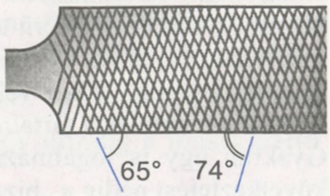
■ 103. ábra



■ 104. ábra

217. A 104. ábrán $ABC\angle = 50°$, $CDE\angle = 36°$, $AB \parallel DE$. Határozzátok meg a BCD szög fokmértékét!

218. A reszelő egyik rovása 65°-os szöget zár be az élével, a másik 74°-osat (105. ábra). Határozzátok meg két különböző irányú rovás hajlásszögét!



■ 105. ábra

GYAKORLATI FELADAT

219. Mérjétek meg szögmérővel a ferde vonalas füzet egyeneseinek hajlásszögét (lásd 52. ábra)!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

220. Határozzátok meg a körvonal átmérőjét, ha: a) 3 cm-rel; b) 3,5 cm-rel hosszabb a sugaránál!

221. Mennyi annak a körvonalnak a hossza, melynek az átmérője: a) 10 cm; b) 0,1 m?

222. Hány közös pontja lehet:

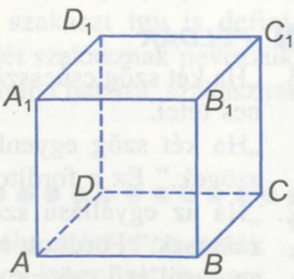
a) egy körvonalnak és egy egyenesnek;

b) egy körlapnak és egy egyenesnek;

c) két körvonalnak?

223. Rajzoljátok át a 106. ábrán látható alakzatot a füzetbe. Mi a neve ennek az alakzatnak? Nevezd meg a csúcsait, éleit, lapjait!

224. Hány pár párhuzamos éle van a kockának?



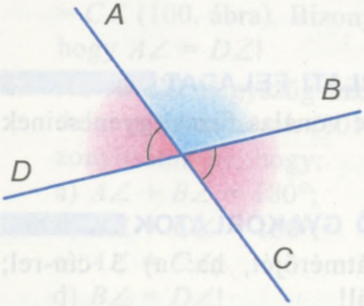
■ 106. ábra

8. §. *Tételek és axiómák*

Már van elképzelésetek arról, hogy mi is az a tantétel.

A tétel (tantétel) egy olyan állítás, amely a megengedett következtetési szabályok alapján egyértelműen meghatározható (bizonyítható).

A tételek *feltételeket* (ami adott) és *következtetéseket* (amit be kell bizonyítani) tartalmaznak. Ahhoz, hogy elválasszuk a feltételeket, a következtetéstől célszerű a tételeket implikációként[1] megfogalmazni, tehát „ha, ... akkor" kötőszavakkal összekapcsolni. Például: ha két szög csúcsszög, akkor fokmértékük egyenlő. A vessző előtti mondatrész a feltételeket tartalmazza, a vessző utáni pedig a következtetést. Gyakran úgy is fogalmaznak, hogy a feltételeket az „adva van", a következtetést pedig a „bizonyítsátok be" szókapcsolattal kezdik. Tehát a csúcsszögekről szóló tételt így is meg lehet fogalmazni.



107. ábra

A d o t t: $AOD\angle$ és $BOC\angle$ csúcsszögek (107. ábra).

B i z o n y í t s á t o k b e: $AOD\angle = BOC\angle$.

B i z o n y í t á s:

$AOD\angle = 180° - AOB\angle$,

mert $AOD\angle$ és $AOB\angle$ mellékszögek,

$BOC\angle = 180° - AOB\angle$,

mivel $BOC\angle$ és $AOB\angle$ mellékszögek.

Tehát $AOD\angle = BOC\angle$.

Ha felcseréljük a feltételt és a következtetést, akkor egy új állítást kapunk. Ami igaz is és hamis is lehet. Ha igaz, akkor az eredeti tétel *fordított (inverz) tételének* nevezzük.

PÉLDÁK

1. „Ha két szög csúcsszög, akkor fokmértékük egyenlő." Ez az egyenes tétel.

   „Ha két szög egyenlő fokmértékű, akkor ezek a szögek csúcsszögek." Ez a fordított állítás, ami nem helytálló.
2. „Ha az egyállású szögek egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak." Fordított tétel: „Ha az egyenesek párhuzamosak, akkor az egyállású szögek egyenlők."

[1] Implikáció – a ha ... akkor formájú logikai művelet.

Azokat a főbb tételeket, melyek a mértani alakzatok tulajdonságait mondják ki, *kritériumnak (ismertetőjelnek)* nevezzük.

A tételek bizonyításakor, a már igaz állításokra támaszkodunk. De ehhez először el kell fogadni néhány állítás igazságát bizonyítás nélkül. Ezeket az állításokat alapigazságoknak, *axiómáknak* nevezzük.

Néhány axiómát már ismertek. Fogalmazzátok meg őket!

! **Bármilyen legyen is az egyenes, mindig léteznek olyan pontok, melyek hozzátartoznak az egyeneshez, és léteznek olyan pontok, melyek nem tartoznak hozzá az adott egyeneshez.**

■ **Két különböző ponton keresztül csak egy egyenes húzható.**

■ **Egy egyenes három pontja közül egy mindig a másik kettő között helyezkedik el.**

■ **Minden szakaszhoz tartozik egy egyértelműen meghatározott mérőszám, a szakasz hossza.**

■ **Minden szöghöz tartozik egy egyértelműen meghatározott mérőszám, a szög fokmértéke.**

■ **Az adott egyenesen kívül fekvő ponton keresztül az adott egyenessel párhuzamosan csak egy egyenes húzható.**

A tételektől és az axiómáktól meg kell különböztetni a *meghatározásokat, definíciókat*, melyek a mértani fogalmakat írják le. Például a szakasz definíciója: szakasznak nevezzük az egyenesnek azt a részét, melyet két pontja határol. A hegyesszög meghatározása: a derékszögnél kisebb szöget hegyesszögnek nevezzük.

A mértan alapja az axióma, a meghatározás és a tétel, melyeket tudni kell. Megfogalmazhatjátok a saját szavaitokkal is, de oda kell figyelni a pontos fogalmazásra. Például a szakaszt így is definiálhatjátok: az egyenes két pontja közötti részét szakasznak nevezzük, vagy az egyenesnek azt a részét, melyet két pontja határol, szakasznak nevezzük.

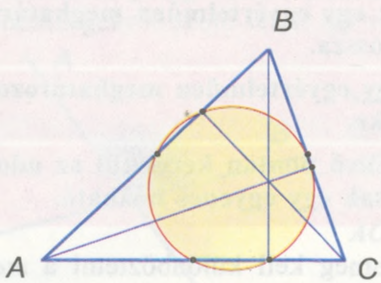
Érdeklődőknek

Az *axióma* görög szó jelentése tekintély, ezért is nevezték azokat az állításokat így, melyeket nem igazoltak, hanem bizonyítás nélkül elfogadták.

A tantétel, tézis, *teoréma* a görög theoró szócsaládhoz tartozik, jelentése szemlél, vizsgál.

A geometriával foglalkozó tudósoknak váratlan és érdekes látványosságnak tűnt egy-egy tantétel sikeres bebizonyítása. Ez egy valódi csoda: néhány bizonyítás nélkül elfogadott egyszerű állítás segítségével, csak meggondolásokkal az ember millió nem nyilvánvaló következtetésre jut. Ezek között olyanokra, amelyekre a természetben nem lát példát, amelyek létezésére egyetlen tudós sem gondolhatott.

Ahhoz, hogy megértsétek milyen elégtétellel töltötte el az ókori matematikusokat egy-egy mértani alakzat egyszerű okfejtésekkel történő újabb tulajdonságának felfedezése és igazolása, próbáljatok válaszolni a következő kérdésre.



108. ábra

Figyeljétek meg a 108. ábrát! Megjelölték az ABC háromszög oldalfelezőit és magasságainak talppontjait. Úgy tűnik, ez a hat pont egy körvonalon van. Vajon igaz-e ez a sejtés? Bármely háromszögre igaz? Aki először rájött a megoldásra, és igazolta is az ehhez hasonló felfedezéseket, azokat olyan érzés töltötte el, mint azt a vándort, aki először érkezett olyan vidékre, ahol még senki sem járt, vagy azt a sportolót, aki megdöntötte a világcsúcsot.

? Ellenőrző kérdések és feladatok

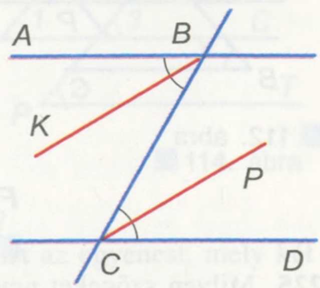
1. Mi a tétel? Hozzatok fel példát!
2. Mi az axióma? Hozzatok fel példát!
3. Mi a meghatározás? Mondjatok példát!
4. Mit nevezünk tételnek, fordított tételnek?
5. Mi az ismertetőjel, kritérium?

Oldjuk meg közösen!

Bizonyítsátok be, hogy a váltószögek szögfelezői párhuzamosak! Fogalmazzátok meg a fordított tételt!

Legyen a BC egyenes az AB és CD párhuzamos egyenesek metsző egyenese, akkor ABC és BCD szögek váltószögek. A BK és a CP félegyenesek a váltószögek szögfelezői (109. ábra). Bebizonyítjuk, hogy ha $AB \parallel CD$, akkor $BK \parallel CP$.

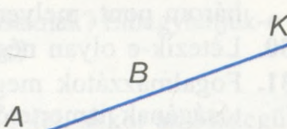
Az $ABC\angle = BCD\angle$, mert váltószögek. Egyenlő szögek fele is egyenlő, tehát $KBC\angle = BCP\angle$. Ezek a szögek a BC metsző egyenes különböző oldalon lévő belső szögei, és mivel ezek egyenlők, így a KB valamint a CP egyenesek párhuzamosak. A tételt bebizonyítottuk.



109. ábra

Fordított tétel: ha két egyenest metszünk egy harmadikkal, és a metsző egyenes különböző oldalain lévő belső szögek szögfelezői párhuzamosak, akkor maguk az egyenesek is párhuzamosak.

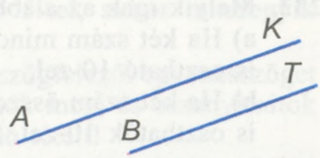
Két félegyenes egyirányú, ha az egyik félegyenes a másik része, vagy ha párhuzamosak és a kezdőpontjaikat összekötő egyenes egyik oldalán vannak. Hozzatok fel példákat!



110. ábra

PÉLDÁK.

Az AK és a BK (110. ábra), valamint az AK és a BT (111. ábra) félegyenesek egyirányúak.



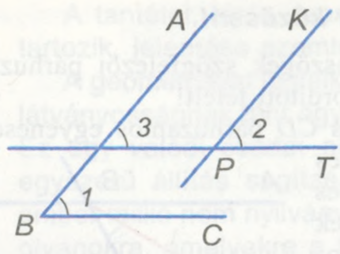
111. ábra

Bizonyítsátok be, hogy azok a szögek, melyek szárai egyirányú félegyenesek, egyenlő fokmértékűek!

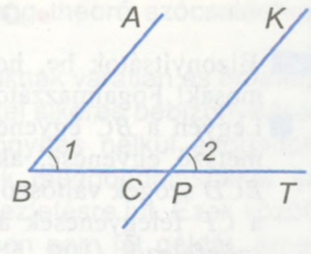
Bebizonyítjuk, ha a BA és PK valamint BC és PT félegyenesek egyirányúak, akkor az $1\angle = 2\angle$ (112. ábra)!

A rajz jelölésének megfelelően $1\angle = 3\angle$ és $3\angle = 2\angle$, akkor $1\angle = 2\angle$.

Ha az adott szögek kölcsönös helyzete a 113. ábra szerinti, akkor a PT félegyenes a BC félegyenesre illeszkedik, ezért mint egyállású szögek $1\angle = 2\angle$.



112. ábra



113. ábra

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

225. Milyen szögeket nevezünk:
a) csúcsszögeknek; b) mellékszögeknek?

226. Fogalmazzátok meg a három egy egyenesen lévő pont kölcsönös helyzetét meghatározó axiómát!

227. Fogalmazzátok meg a szakaszok mérésének axiómáját!

228. Fogalmazzátok meg Eukleidész párhuzamossági axiómáját!

229. Bármely három ponton át húzható egyenes? Létezik-e olyan három pont, melyen keresztül egyenes húzható?

230. Létezik-e olyan négy pont, melyen keresztül egyenes húzható?

231. Fogalmazzátok meg a természetes számok 3-mal való oszthatóságának ismertetőjelét! Hogyan fogalmazhatnátok meg másképpen?

232. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
a) Ha két szám mindegyike osztható 10-zel, akkor az összegük is osztható 10-zel;
b) Ha két szám összege osztható 10-zel, akkor az összeadandók is oszthatók 10-zel.

A

233. Fogalmazzátok meg a mellékszögek tulajdonságáról szóló tételt! Adjátok meg implikációként!

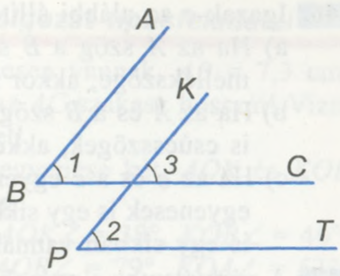
234. Fogalmazzátok meg adott egyenessel párhuzamos két egyenes tulajdonságát! Írjátok le matematikai képlettel!

235. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
a) Ha két szög egyenlő, akkor csúcsszögek;
b) A csúcsszögek egyenlők;
c) Ha két szög nem egyenlő, akkor nem csúcsszögek.

236. Fogalmazzátok meg az 1. tétellel fordított állítást! tétel-e ez az állítás? Miért?

237. Fogalmazzátok meg az 5. tétellel fordított állítást! Tétel-e ez az állítás?

238. A 114. ábra alapján a tanuló úgy érvel, hogy ha $AB \parallel KP$ és $BC \parallel \parallel PT$, akkor $1\angle = 3\angle = 2\angle$. Vagyis az egymással párhuzamos megfelelő szárú szögek egyenlők. Vizsgáljatok meg különböző eseteket!



114. ábra

239. Helyesek-e az alábbi meghatározások?

a) A szög szögfelezőjének nevezzük azt az egyenest, mely két egyenlő részre osztja a szöget;

b) A szög szögfelezőjének nevezzük azt a félegyenest, mely két egyenlő részre osztja a szöget.

240. Olvassátok el újra *A szögek és mérésük* című paragrafus első három bekezdését! Van-e bennük meghatározás? Fogalmazzátok meg az egyiket!

B

241. Milyen egyeneseket nevezünk párhuzamosaknak? Elhagyhatjuk-e a meghatározásból a „síkban” szót? Miért?

242. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) Ha három szám mindegyike osztható 5-tel, akkor az összegük is osztató 5-tel;

b) Ha három szám összege osztható 5-tel, akkor mindegyik összeadandó is osztató 5-tel.

243. Bizonyítsátok be, hogy a csúcsszögek szögfelezői egyenesszöget alkotnak! Hasonlóképpen fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a mellékszögek szögfelezőiről szóló tételt!

244. Fogalmazzátok meg szavakkal és bizonyítsátok be az alábbi állításokat:

a) ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$, akkor $a \parallel c$;

b) ha $a \perp b$ és $b \perp c$, akkor $a \parallel c$!

A térben is igazak-e ezek az állítások?

245. Bizonyítsátok be:

a) ha az *A* szög egyenlő a *B* szöggel és a *B* szög a *C* szöggel, akkor az *A* szög egyenlő a *C* szöggel;

b) ha az *AB* szakasz egyenlő a *KP* -vel és a *KP* az *MT*-vel, akkor az *AB* szakasz egyenlő az *MT* szakasszal.

246. Igazak-e az alábbi állítások?
a) Ha az A szög a B szög mellékszöge és a B szög a C szög mellékszöge, akkor az A szög mellékszöge a C szögnek;
b) Ha az A és a B szög csúcsszögek, valamint a B és C szögek is csúcsszögek, akkor az A szög és a C szög is csúcsszög;
c) Ha az a és a c egyenesek egy síkban vannak, és a c és az n egyenesek is egy síkban vannak, akkor az a és az n egyenesek is egy síkban vannak.

247. A párhuzamos sínpárokat, a napsugarakat rajzokon nem párhuzamos vonalakkal modellezik, ábrázolják (115. ábra). Hozzatok fel példát arra az esetre, amikor nem párhuzamos egyeneseket, párhuzamos egyenesekkel ábrázolnak!

115. ábra

248. Bizonyítsátok be, hogy ha két párhuzamos egyenest metszünk egy harmadikkal, akkor:
a) a különböző oldalon lévő külső szögek egyenlők;
b) az egy oldalon lévő külső szögek összege 180°!

249*. Bizonyítsátok be, hogy **a megfelelő merőleges szárú szögek vagy egyenlők, vagy az összegük 180°!**

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

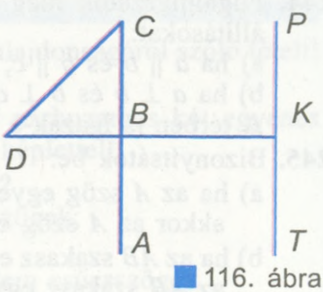
250. Hány olyan pontja van az egyenesnek, mely az egyenes A és a B pontja között van?

251. Milyen részekre osztja az egyenest két pontja?

252. Hány különböző szakasz van a 116. ábrán? Nevezzétek meg őket!

253. Hány különböző töröttvonallal köthető össze az K és P pontok? Hány szakasszal? Hány körvonal húzható e két ponton keresztül?

254. Egy hüvelyk 2,5 cm. Hány négyzetcentiméter egy négyzethüvelyk?



116. ábra

Ellenőrző dolgozat típusfeladatai

Az A, B és C pontok egy egyenesen vannak. $AB = 7{,}3$ cm, $BC = 3{,}7$ cm. Határozzátok meg az AC szakasz hosszát! Vizsgáljatok meg két különböző esetet!

Az AOB szöget az OK belső félegyenese két, AOK és KOB szögre osztotta. Határozzátok meg:

a) az AOB szög fokmértékét, ha $AOK\angle = 30°$, $KOB\angle = 40°$;

b) a KOB szög fokmértékét, ha $AOB\angle = 79°$, $KOA\angle = 53°$;

c) a KOA szög fokmértékét, ha 20°-kal kisebb, mint a KOB szög fokmértéke és $AOB\angle = 80°$!

Rajzoljatok egy $ABC\angle = 120°$-os szöget! Húzzátok meg a BM szögfelezőjét, majd az MBC szög BK szögfelezőjét! Határozzátok meg a KBC és az ABK szögek fokmértékét!

Határozzátok meg a két egyenes metszésekor keletkezett 4 szög fokmértékét, ha az egyik szög fokmértéke 45°!

Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül:

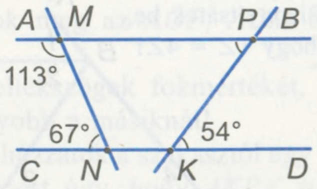
a) az egyik 25°-kal nagyobb, mint a másik;

b) az egyik 3-szor kisebb, mint a másik!

A 117. ábra alapján határozzátok meg:

a) párhuzamosak-e az AB és CD egyenesek;

b) a KPM szög fokmértékét!



117. ábra

Két párhuzamos egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett 8 szög közül kettőnek az összege 240°. Határozzátok meg mind a nyolc szög fokmértékét!

Az AB és a KP szakaszok az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, ha $AKO\angle = OPB\angle$, akkor $KAO\angle = OBP\angle$!

Az AB és a KP szakaszok az O pontban metszik egymást. OM az AOP szög szögfelezője. Határozzátok meg a KOM szög fokmértékét, ha $AOK\angle - AOM\angle = 36°$!

Bizonyítsátok be, hogy a társszögek szögfelezői merőlegesek egymásra!

Rajzos feladatok

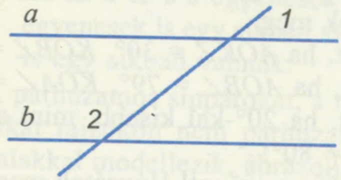
	A	B

1

A

$1\angle = 50^\circ$, $2\angle = 130^\circ$.

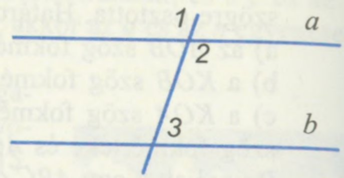
Bizonyítsátok be, hogy $a \parallel b$!



B

$1\angle : 2 = 3 : 2$, $3\angle = 72^\circ$.

Bizonyítsátok be, hogy $a \parallel b$!

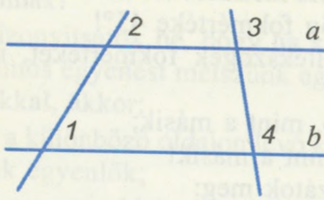


2

A

$1\angle = 2\angle$, $3\angle = 80^\circ$.

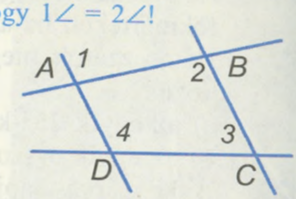
$4\angle$



B

$3\angle + 4\angle = 180^\circ$.

Bizonyítsátok be, hogy $1\angle = 2\angle$!

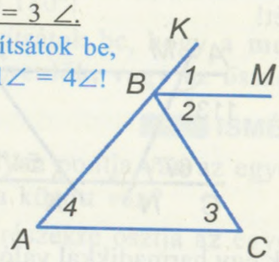


3

A

$2\angle = 3\angle$.

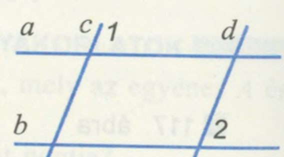
Bizonyítsátok be, hogy $1\angle = 4\angle$!



B

$a \parallel b$, $1\angle = 2\angle$.

Bizonyítsátok be, hogy $c \parallel d$!

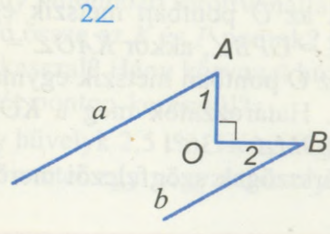


4

A

$a \parallel b$, $1\angle = 60^\circ$.

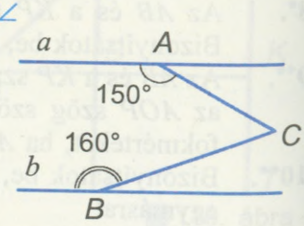
$2\angle$



B

$a \parallel b$.

$C\angle$



2. számú önálló munka

1. változat

1°. Az AB és a KP szakaszok az O pontban metszik egymást. Az $AOK\angle = 50°$. Határozzátok meg az AOP, BOP és BOK szögek fokmértékét!

2°. Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül az egyik 18°-kal nagyobb a másiknál!

3•. Az AB szakasz végpontjaiból húzzatok a szakasztól egy irányba egy AK és egy BC félegyenest úgy, hogy $KAB\angle = 107°$ és $ABC\angle = 73°$! Párhuzamosak-e ezek a félegyenesek? Miért?

2. változat

1°. Az MN és a KT szakaszok az X pontban metszik egymást. Az $MXK = 65°$. Határozzátok meg az MXT, TXN és KXN szögek fokmértékét!

2°. Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül az egyik 3-szor nagyobb a másiknál!

3•. Az AB szakasz végpontjaiból húzzatok a szakasztól egy irányba egy AM és egy BC félegyenest úgy, hogy $MAB\angle = 102°$ és $ABC\angle = 77°$! Párhuzamosak-e ezek a félegyenesek? Miért?

3. változat

1°. Az AC és a MP szakaszok az O pontban metszik egymást. Az $MOC\angle = 48°$. Határozzátok meg az AOP, AOM és POC szögek fokmértékét!

2°. Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül az egyik 26°-kal nagyobb a másiknál!

3•. A KP szakasz végpontjaiból húzzatok a szakasztól egy irányba egy KA és egy PB félegyenest úgy, hogy $AKP\angle = 97°$ és $KPB\angle = 83°$! Párhuzamosak-e ezek a félegyenesek? Miért?

4. változat

1°. Az AB és a CD szakaszok az M pontban metszik egymást. Az $AMC\angle = 35°$. Határozzátok meg az AMD, CMB és BMD szögek fokmértékét!

2°. Határozzátok meg azon mellékszögek fokmértékét, melyek közül az egyik 15°-kal kisebb a másiknál!

3•. Az AB szakasz végpontjaiból húzzatok a szakasztól egy irányba egy AK és egy BM félegyenest úgy, hogy $KAB\angle = 58°$ és $ABM\angle = 123°$! Párhuzamosak-e ezek a félegyenesek? Miért?

2. számú teszt feladatsor

1. Hány fokos egy 100°-os szög mellékszöge?
a) 100°; b) 80°; c) 8°; d) 50°.

2. Milyen egy tompaszög mellékszöge?
a) tompaszög; b) derékszög; c) hegyesszög; d) egyenesszög.

3. Milyen relációs jelet kell kitenni az $AOP\angle * BOC\angle$ kifejezésbe a csillag helyére, ha az AOP és a BOC szögek csúcsszögek?
a) $<$; b) $=$; c) $>$; d) $\geqslant$.

4. Két egyenes metszésekor keletkezett szögek közül három összege 280°. Mekkora a negyedik szög fokmértéke?
a) 100°; b) 80°; c) 90°; d) 70°.

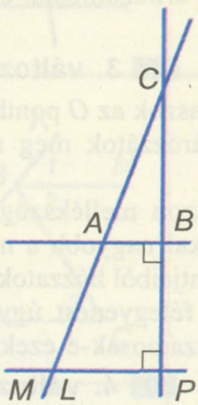
Az 5–10. feladatok megoldásához használjátok a 118. ábrát!

5. Milyen jelet kell pótolni a csillag helyére : $CB * LP$?
a) $\parallel$; b) $=$; c) $\in$; d) $\perp$.

6. Mely egyenesek párhuzamosak?
a) BP és LC; b) CP és AB; c) AB és LP; d) CB és LP.

7. Milyen az ABC szög?
a) hegyesszög; b) tompaszög; c) derékszög; d) egyenesszög.

8. $ALM\angle = 130°$. Határozzátok meg az LAB szög fokmértékét!
a) 50°; b) 80°; c) 130°; d) 120°.



118. ábra

9. Határozzátok meg a CAB szög fokmértékét, ha $MLA\angle = 145°$!
a) 145°; b) 45°; c) 25°; d) 35°.

10. A C pont 12 cm-re van az MP egyenestől. Határozzátok meg a C pont távolságát az AB egyenestől, ha $CB = BP$!
a) 12 cm; b) 4 cm; c) 6 cm; d) 24 cm.

• Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Milyen szögeket nevezünk mellékszögeknek?
2. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a mellékszögek tulajdonságát!
3. Milyen szögeket nevezünk csúcsszögeknek?
4. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a csúcsszögek tulajdonságát!
5. Mit értünk két egyenes hajlásszöge alatt?
6. Milyen egyeneseket nevezünk merőlegeseknek?
7. Milyen szakaszokat nevezünk merőlegeseknek?
8. Milyen egyeneseket nevezünk párhuzamosaknak?
9. Milyen szakaszokat nevezünk párhuzamosaknak?
10. Hogyan és milyen rajzeszközökkel lehet az adott egyenesre merőleges egyenest húzni?
11. Hogyan lehet az adott egyenessel párhuzamos egyenest húzni?
12. Fogalmazzátok meg a párhuzamos egyenesek definícióját!
13. Mi a metsző egyenes?
14. Milyen szögeket nevezünk különböző oldalon fekvő belső szögeknek? Egy oldalon lévő belső szögeknek? Mutassátok meg rajzon!
15. Milyen szögeket nevezünk egyállású szögeknek? Mutassátok meg rajzon!
16. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelét!
17. Fogalmazzátok meg, Eukleidész párhuzamossági axiómáját!
18. Mit tudtok Eukleidészről, leghíresebb művéről, az *Elemek*ről?
19. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a váltószögekről szóló tételt!
20. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az egy egyenesre merőleges két egyenesről szóló tételt!
21. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az egyenesek párhuzamosságának tranzitivitásáról szóló tantételt!
22. Mi a tétel? Hozzatok fel példát!
23. Mi az axióma? Mondjatok példát!
24. Mi a meghatározás? Hozzatok fel példát!
25. Milyen állítást nevezünk tételnek, fordított tételnek?
26. Mi az ismertetőjel, kritérium?

A második fejezet összefoglalása

Azt a két szöget, melyre bármelyik belső félegyenese az egyenesszöget osztja, *mellékszögeknek* nevezzük. A mellékszögek összege 180°.

Két szöget *csúcsszögeknek* nevezünk, ha az egyik szög szárai a másik szög szárainak kiegészítő félegyenesei. A csúcsszögek egyenlők.

Két egyenes metszésekor négy szögtartomány keletkezik: két pár csúcsszög. A hegyesszöget a két egyenes hajlásszögének nevezzük.

Két egyenes *merőleges*, ha derékszögben metszik egymást. Két szakasz vagy félegyenes merőleges, ha merőleges egyenesekre illeszkednek.

Két egyenes a síkban *párhuzamos*, ha nincs közös pontjuk.

Két egyenes *metsző* egyenesének nevezzük azt az egyenest, mely mind a két egyenest metszi. Két egyenes és a metsző egyenes a síkot nyolc szögtartományra osztja:

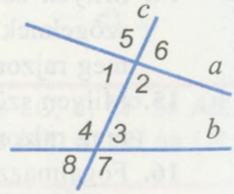
különböző oldalon fekvő belső szögek: 1 és 3, 2 és 4;

egy oldalon lévő belső szögek: 1 és 4; 2 és 3;

különböző oldalon fekvő külső szögek: 5 és 7, 8 és 6;

egy oldalon lévő külső szögek: 5 és 8, 6 és 7;

megfelelő szögek: 5 és 4, 6 és 3, 1 és 8, 2 és 7.

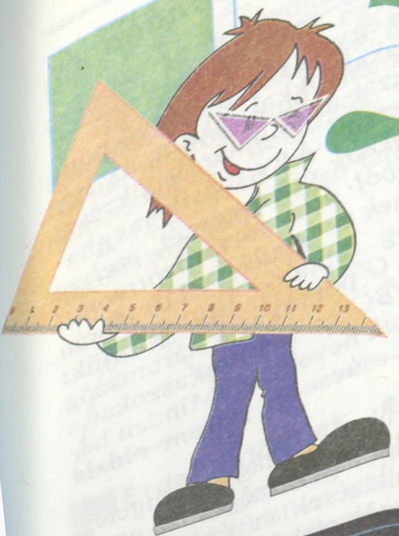


A párhuzamos egyenesek ismertetőjele

- **Két egyenes akkor párhuzamos, ha a metsző egyenes különböző oldalain fekvő belső szögek egyenlők, vagy a megfelelő szögek egyenlők, esetleg az egy oldalon lévő belső szögek összege 180°.**

A párhuzamos egyenesek tulajdonsága

- **Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor a váltószögek és az egyállású szögek egyenlők, a társszögek összege pedig 180°.**
- **Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor a két egyenes egymással is párhuzamos.**
- **Ha egy egyenes merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre, akkor merőleges a másikra is. Egy egyenesre merőleges egyenesek párhuzamosak egymással.**



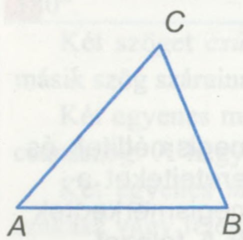
3. fejezet
HÁROMSZÖGEK

Ebben a fejezetben megismétlitek és kibővítitek eddigi ismereteiteket a háromszögekről, és megismerkedtek több tulajdonságukkal. A fejezet legfontosabb paragrafusa a ***háromszögek egybevágóságával*** foglalkozik, amit alaposan meg kell tanulnotok ahhoz, hogy a többi fejezet tananyagát is kellő szinten el tudjátok sajátítani.

- A HÁROMSZÖG NEVEZETES VONALAI ÉS PONTJAI
- A HÁROMSZÖG BELSŐ SZÖGEINEK ÖSSZEGE
- A MÉRTANI ALAKZATOK EGYBEVÁGÓSÁGA
- A HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK ISMERTETŐJELEI
- EGYENLŐ SZÁRÚ HÁROMSZÖG
- A HÁROMSZÖGEK EGYBEVÁGÓSÁGÁNAK HARMADIK ISMERTETŐJELE
- DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG
- HÁROMSZÖG EGYENLŐTLENSÉG

Eukleidész mértana csak az első lépés a világ megismerésének útján.
O. Szmohorzsevszkij

9. §. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai



119. ábra

Ha három, nem egy egyenesen lévő pontot összekötünk szakaszokkal, akkor az így kapott mértani alakzat által határolt síkrészt *háromszögnek* nevezzük. Egy másik meghatározás szerint: *a síknak azt a részét, melyet egy három szakaszból álló zárt töröttvonal határol, háromszögnek nevezzük.* A 119. ábrán az ABC háromszög látható. Így jelöljük: $ABC\triangle$. Az A, B és C pontokat a háromszög *csúcsainak*, az AB, BC és CA szakaszokat a háromszög *oldalainak* nevezzük. Minden háromszögnek három csúcsa és három oldala van.

A bennünket körülvevő világból rengeteg példát hozhatunk fel a háromszögre: az emelődaru, gyári berendezések és építmények egyes elemei háromszög alakúak (120. ábra).

120. ábra

A háromszög oldalhosszainak összegét a háromszög *kerületének* nevezzük.

A háromszög bármelyik oldala rövidebb a másik két oldal összegénél. Miért?

Azt a szakaszt, amely a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával köti össze, *súlyvonalnak* nevezzük. Azt a szakaszt, amely a háromszög szögfelező félegyenesének a háromszöghöz tartozó része, a háromszög *szögfelezőjének* nevezzük. A háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakaszt a háromszög *magasságának* nevezzük. A 121. ábrán látható ABC háromszögnek CM a C csúcsból húzott súlyvonala, CL a szögfelezője és CH a magassága.

121. ábra

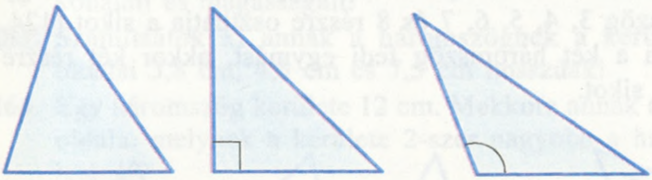
Minden háromszögnek három súlyvonala, három szögfelezője és három magassága van.

A háromszög a síkot két tartományra osztja: külső és belső tartományra. Azt az alakzatot, amely a háromszögből, illetve annak belső tartományából áll, szintén *háromszögnek* hívjuk.

Az *ABC*, a *BAC* és az *ACB* szögek az *ABC háromszög szögei*. Néha csak $A\angle$, $B\angle$ és $C\angle$ jelöléseket használunk. Minden háromszögnek három szöge van.

Ha a háromszög egyik szöge derék- vagy tompaszög, akkor a háromszöget *derékszögű*, illetve *tompaszögű* háromszögnek nevezzük. Ha háromszög mind a három szöge hegyesszög, akkor azt *hegyesszögű* háromszögnek nevezzük.

A 122. ábrán egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszög van. Belső tartományaik színesek.



122. ábra

Érdeklődőknek

A *háromszög* fogalmán nem csak a három szakaszból álló zárt töröttvonalat értjük, hanem a síknak a töröttvonallal körülhatárolt részét is.

Ugyanígy a háromszög oldala kifejezés jelentheti magát a szakaszt és a szakasz hosszát is; a *háromszög magassága* lehet egy adott szakasz vagy ennek a szakasznak a hossza. Kényelmi szempontok miatt, „a háromszög magasságának hossza 5 cm" terjedelmes mondat helyett, rövidebben csak úgy fogalmazunk, hogy „a háromszög magassága 5 cm." Mindkét esetben pontosan fogalmaztunk.

Bármely sokszög feldarabolható véges számú háromszögre. Épp ezért a háromszög fogalma nagyon fontos a mértanban épp úgy, mint az atom fogalma a fizikában, vagy a tégla az épületben. A mértan egyik külön ága a *háromszögek geometriája*, mely nagyon érdekes és tartalmas tudomány.

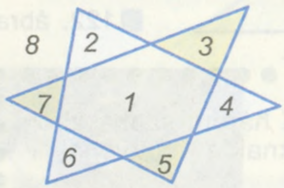
? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mit nevezünk háromszögnek?
2. Nevezzétek meg a háromszög elemeit!
3. Soroljátok fel a háromszögek fajtáit szögeik szerint. Definiáljátok őket!
4. Mit snevezünk súlyvonalnak, magasságnak, szögfelezőnek?
5. Van-e különbség a háromszög szögfelezője és a szög szögfelezője között?

• Oldjuk meg közösen!

1. Hány részre oszthatja a síkot az adott síkban lévő két háromszög?

Ha mind a két háromszög egy síkban van, akkor legfeljebb 8 részre osztják a síkot (123. ábra). Képzeljük el, hogy az egyik háromszöget folyamatosan úgy mozdítjuk el, hogy először csak az egyik metszet egy ponttá zsugorodjon, majd a következő is és így tovább. Ezzel az eljárással meggyőződhetünk róla, hogy 2 háromszög 3, 4, 5, 6, 7 és 8 részre oszthatja a síkot (124. ábra). Ha a két háromszög fedi egymást, akkor két részre osztják a síkot.



123. ábra

124. ábra

2. Egy háromszög oldalainak számtani közepe m. Határozzátok meg a kerületét!

Ha a háromszög oldalait a, b és c-vel jelöljük, a kerületét pedig P-vel, akkor $\frac{a+b+c}{3} = m$, vagy $\frac{P}{3} = m$, tehát $P = 3m$.

• FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

255. Lehet-e egy háromszög két oldala merőleges a harmadik oldalra?

256. Egy háromszög hány magassága lehet a háromszögön kívül?

257. Lehet-e a háromszög egyik oldala egyben a magassága is?

258. Határozzátok meg az $ABC\triangle$ kerületét, ha:

a) $AB = 6$, $BC = 3$, $AC = 7$; b) $AB = 2{,}2$, $BC = 8{,}5$, $AC = 8{,}8$!

259. Létezik-e olyan háromszög, melynek az oldalai 3 cm, 4 cm és 8 cm hosszúak?

A

260. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget! Jelöljétek K, P és T pontokkal a csúcsait! Nevezzétek meg a háromszög oldalait és szögeit! Számítsátok ki a KPT háromszög kerületét!

261. Rajzoljatok egy ABC hegyesszögű háromszöget! Az A csúcsából húzzátok meg a háromszög magasságát, súlyvonalát és szögfelezőjét!

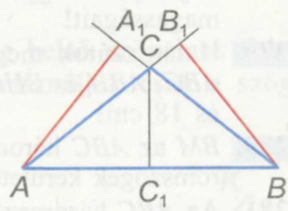
262. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget! Húzzátok meg a súlyvonalait és magasságait!

263. Számítsátok ki annak a háromszögnek a kerületét, melynek oldalai 3,8 cm, 4,5 cm és 7,5 cm hosszúak!

264. Egy háromszög kerülete 12 cm. Mekkora annak a négyzetnek az oldala, melynek a kerülete 2-szer nagyobb a háromszög kerületénél?

265. AN és BM az ABC háromszög súlyvonalai. $AN = 5$ cm, $BM = 7$ cm. Mekkora az ABC háromszög kerülete, ha $AB = 15$ cm?

266. Igaz-e, hogy az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok az ABC háromszög magasságai (125. ábra)?



125. ábra

267. Egy háromszög a síkot két részre osztja: egy végesre és egy végtelenre. Hány részre oszthatja a síkot egy háromszög és egy rajta fekvő egyenes? Egy háromszög és egy körvonal?

268. Hány különböző háromszög van a 126. ábrán?


126. ábra

269. Az ABC háromszög kerülete 26 cm. Mekkorák a háromszög oldalai, ha $AC = 10$ cm és:
a) $BC = 3AB$; b) $AB : BC = 3 : 5$;
c) $AB = BC$; d) $BC - AB = 6$ cm?

B

270. Minden háromszög felosztható-e két háromszögre? Felosztható-e n háromszögre? Hogyan tudjátok felosztani 3 háromszögre? És négy háromszögre?

271. Mutassátok meg, hogyan lehet egy háromszöget 2, 3, 4 és 5 háromszögre feldarabolni!

272. Mekkorák annak a háromszögnek az oldalai, melynek az egyik oldala 2-szer hosszabb a másiknál, és másfélszer hosszabb a harmadiknál, a második oldala pedig 2 cm-rel rövidebb a harmadiknál?

273. Határozzátok meg annak a háromszögnek a kerületét, melynek a kerülete 7 m-rel nagyobb az első oldalnál, 8 m-rel a másodiknál és 9 m-rel a harmadiknál!

274. Egy háromszög oldalainak a számtani közepe 10 dm. Mekkora a kerülete?

275. Egy négyzet kerülete 4 dm. Kivágható-e belőle egy olyan háromszög, melynek a kerülete 3 dm?

276. Létezik-e olyan háromszög, melynek a kerülete az egyik oldal 1000-szerese? És olyan, aminek a kerülete az egyik magasság 1000-szerese?

277. Az egyik háromszög oldalainak az aránya 4 : 5 : 8. Mekkora a kerülete, ha a legnagyobb oldal 24 cm-rel hosszabb a legrövidebb oldalnál?

278. Rajzoljatok egy tompaszögű háromszöget, és húzzátok meg a magasságait!

279. Határozzátok meg az ABC háromszög BH magasságát, ha az ABC, ABH és BHC háromszögek kerületei rendre 26 cm, 14 cm és 18 cm!

280. BM az ABC háromszög egyik súlyvonala. Az ABM és BMC háromszögek kerületei egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy $AB = BC$!

281. Az ABC háromszög AB és BC oldalain egy M és egy K pontot vettek fel úgy, hogy $MK \parallel AC$. Bizonyítsátok be, hogy az $MBK\angle$ szögei egyenlők az ABC háromszög megfelelő szögeivel!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

282. Emlékezzetek vissza, hogyan kell kiszámítani a téglalap területét! És a négyzet területét?

283. Milyen mértékegységeket használunk terület mérésére?

284. Hány négyzetméter 1 km^2; 1 ha; 1 ár?

285. Igaz-e, hogy két egybevágó derékszögű háromszögből készíthető egy téglalap?

286. Hogyan határozható meg a derékszögű háromszög területe?

287. Egy téglalap alakú mező területe 20 ha, egyik oldala pedig fél kilométer hosszú. Mekkora a másik oldal?

288. Az AOB és BOC szögek fokmértékeinek összege 100°. Mekkora szöget zár be szögfelezőjük, ha az OB félegyenes az AOC szög belső félegyenese!

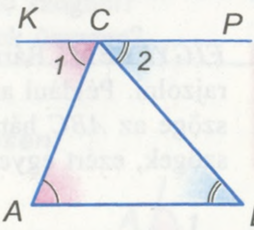
10. §. *A háromszög szögeinek összege*

! 8. tantétel. A háromszög belső szögeinek összege 180°.

BIZONYÍTÁS.

Legyen az ABC tetszőleges háromszög (127. ábra). A C csúcson át AB oldallal párhuzamos KP egyenest húzunk.

Jelöljük az ACK szöget 1-essel, a BCP szöget 2-essel. Akkor az $A\angle = 1\angle$ és $B\angle = 2\angle$, mert váltószögek. Az 1-es, a 2-es és a C szög egyenesszöget alkot, így összegük 180°. Ezért $= A\angle + B\angle + C\angle = 1\angle + C\angle + 2\angle = 180°$. Tehát $A\angle + B\angle + C\angle = 180°$. □



127. ábra

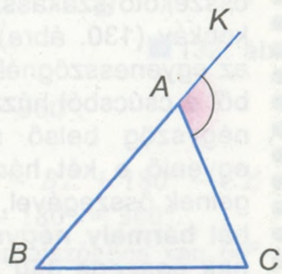
MEGJEGYZÉS.

A 8. tételben természetesen a háromszög belső szögeinek fokmértékéről van szó, az egyszerűség miatt használjuk csak a szög kifejezést.

KÖVETKEZMÉNY.

Egy háromszögnek nem lehet két derék- vagy két tompaszöge. Bármely háromszögnek legalább két szöge hegyesszög.

Néha nem a háromszögek belső szögeiről van szó, hanem a külső szögekről. A *háromszög külső szögének* nevezzük az adott csúcsnál fekvő szög mellékszögét. Például az ABC háromszög A csúcsánál a KAC szög a külső szög (128. ábra).

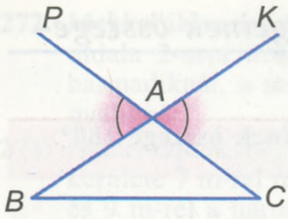


128. ábra

! 9. tantétel. A háromszög külső szöge egyenlő a vele mellékszöget nem alkotó két belső szög összegével.

BIZONYÍTÁS.

Legyen a $KAC\angle$ az ABC háromszög egyik külső szöge (128. ábra). Akkor $KAC\angle = 180° - BAC\angle$ (a mellékszögekről szóló tétel alapján).



129. ábra

$B\angle + C\angle = 180° - BAC\angle$ (a háromszögek belső szögeiről szóló tétel alapján). Tehát $KAC\angle = B\angle + C\angle$.□

KÖVETKEZMÉNY.

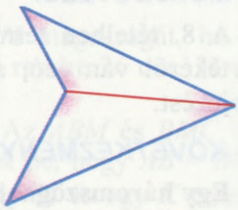
A háromszög külső szöge nagyobb a vele mellékszöget nem alkotó bármely belső szögnél.

FIGYELEM! Bármelyik csúcsnál két külső szöget tudunk megrajzolni. Például az *A* csúcsnál lévő *KAC* és a *PAB* szög is külső szöge az *ABC* háromszögnek (129. ábra). Ezek a szögek csúcsszögek, ezért egyenlők.

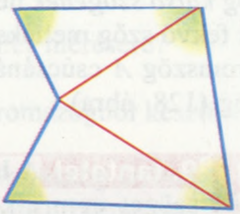
Érdeklődőknek

A háromszögek belső szögeiről szóló tételt általánosíthatjuk sokszögekre.

Bármelyik négyszöget két háromszögre tudjuk felosztani egyik átlójával, egy, a két nem szomszédos csúcsot összekötő szakasszal. (Ha a négyszög konkáv (130. ábra), akkor egyik szöge az egyenesszögnél nagyobb, akkor ebből a csúcsból húzzuk meg az átlót.) A négyszög belső szögeinek összege egyenlő e két háromszög belső szögeinek összegével, vagyis 180° · 2. Tehát **bármely négyszög belső szögeinek összege 360°.**


130. ábra

Bármelyik ötszög egy négyszögre és egy háromszögre vagy három háromszögre darabolható (131. ábra). Tehát egy ötszög belső szögeinek az összege 180° · 3, vagyis 540°.


131. ábra

Próbáljátok felírni képlettel az *n* oldalú sokszög belső szögeinek összegét!

? Ellenőrző kérdések és feladatok

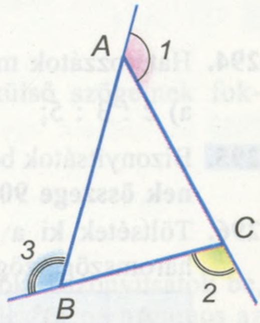
1. Fogalmazzátok meg a háromszög belső szögeinek összegéről szóló tételt!
2. Melyik szöget nevezzük a háromszög külső szögének?
3. Fogalmazzátok meg a háromszög külső szögéről szóló tételt!
4. Igaz-e, hogy a háromszög külső szöge nagyobb a vele mellékszöget nem alkotó bármelyik belső szögnél?
5. Mennyi a négyszögek belső szögeinek összege?

Oldjuk meg közösen!

1. Mennyi a háromszögek külső szögeinek összege?

Egy tetszőleges ABC háromszög külső szögeit jelöljük 1, 2 és 3 számmal (132. ábra). A külső szögről szóló tétel alapján

$1\angle = B\angle + C\angle$, $2\angle = A\angle + B\angle$,
$3\angle = A\angle + C\angle$.



132. ábra

Összeadva az egyenlőségek jobb és bal oldalát, azt kapjuk, hogy:

$1\angle + 2\angle + 3\angle =$
$= 2 \cdot (A\angle + B\angle + C\angle) = 2 \cdot 180° = 360°$.

Második módszer:

$1\angle + 2\angle + 3\angle = 180° - A\angle + 180° - B\angle + 180° - C\angle =$
$= 540° - (A\angle + B\angle + C\angle) = 540° - 180° = 360°$.

2. Bizonyítsátok be, hogy bármelyik háromszögben van 60°-os szögnél nem nagyobb és 60°-os szögnél nem kisebb szög.

Ha egy háromszög minden szöge kisebb lenne 60°-nál, akkor a háromszög belső szögeinek összege kisebb lenne, mint 180°, de ez lehetetlen. Ha egy háromszög minden szöge nagyobb lenne 60°-nál, akkor a háromszög belső szögeinek összege nagyobb lenne, mint 180°, de ez lehetetlen.

Tehát minden háromszögben van olyan szög, amelyik nem nagyobb, mint 60° és van olyan, ami nem kisebb, mint 60°.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

289. Egy háromszög két belső szögének összege 80°. Mekkora a harmadik szög fokmértéke?

290. Egy háromszög két belső szöge 30°-os. Mekkora a háromszög harmadik szöge?

291. Létezik-e olyan háromszög, melynek a szögei 60°, 70° és 80°?

292. Egy háromszög két szöge 20° és 80°. Hány fokos a harmadik szög?

293. Hány fokos annak a derékszögű háromszögnek a harmadik szöge, melynek az egyik hegyesszöge 30°?

A

294. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha azok aránya:

a) 2 : 3 : 5; b) 1 : 5 : 6; c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$!

295. Bizonyítsátok be, hogy **a derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege 90°!**

296. Töltsétek ki a táblázatot, ha az *A*, *B* és *C* szögek egy *ABC* háromszög szögei!

A	30°	20°		83°	95°		54°
B	70°		45°		35°	47°	
C		100°	45°	17°		67°	54°

297. Mekkorák a háromszög szögei, ha az egyik szöge:

a) egyenlő a másodikkal és 30°-kal kisebb a harmadiknál;

b) 20°-kal nagyobb a másodiknál és 40°-kal nagyobb a harmadiknál;

c) 2-szer nagyobb a másodiknál és 10°-kal nagyobb a harmadiknál?

298. Az *ABC* háromszög *A* és *B* szöge is 65°-os. Határozzátok meg a *C* csúcsnál lévő külső szöget!

299. Lehet-e egy háromszög minden külső szöge 100°-os?

300. Az egyik háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 2 : 3. Bizonyítsátok be, hogy ez a háromszög derékszögű!

B

301. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit, ha $A\angle + B\angle = 100°$ és $B\angle + C\angle = 120°$!

302. $ABC\angle = 30°$. Hány fokos szög alatt metszi az AC egyenes a BC félegyenest, ha a BA félegyenest 45°-os szög alatt metszi?

303. CH és CL az ABC háromszög C csúcsból húzott szögfelezője és magassága. $A\angle = 60°$, $B\angle = 30°$. Mekkora a HCL szög?

304. CL az ABC háromszög egyik szögfelezője. $A\angle = 80°$, $B\angle = 40°$. Határozzátok meg:
a) a CLA szög fokmértékét;
b) az A és B szögek szögfelezőinek hajlásszögét!

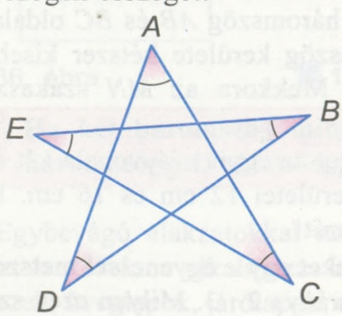
305. CH az ABC háromszög egyik magassága. Hány fokos az ACH és a BCH szög, ha:
a) $A\angle = 30°$, $B\angle = 60°$;
b) $A\angle = 30°$, $B\angle = 120°$?

306. Határozzátok meg az ABC háromszög külső szögeinek fokmértékét, ha:
a) $A\angle = 40°$, $B\angle = 50°$;
b) $C\angle = 40°$, $B\angle = 120°$;
c) $A\angle + B\angle = 100°$, $B\angle + C\angle = 130°$;
d) $A\angle + C\angle = 95°$, $B\angle + C\angle = 135°$!

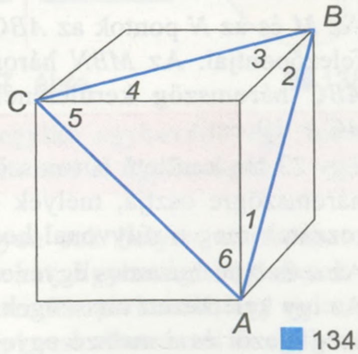
307. Az ABC háromszög A és B szögei egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy a C csúcsnál lévő külső szög szögfelezője párhuzamos az AB oldallal!

308*. Hány fokos az ötágú csillag A, B, C, D és E szögeinek összege (133. ábra)?

309. Az ABC háromszöget egy kocka megfelelő eleinek összekötésével kaptuk (134. ábra). Határozzátok meg a rajzon számmal jelölt szögek összegét!

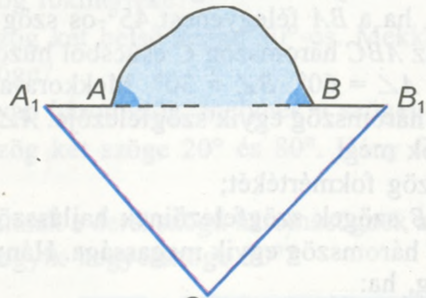


133. ábra



134. ábra

310. Az AB egyenes alagutat a hegy két oldalától kezdték el fúrni. Helyesen jelölték-e ki az A_1A és B_1B irányokat, ha a mérések eredményei azt mutatták, hogy $A_1\angle = 50°10'$, $B_1\angle = 48°20'$ és $C\angle = 80°5'$?



135. ábra

GYAKORLATI FELADAT

311. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget, majd húzzátok meg mind a három szögfelezőjét! Mit vettetek észre? Állíthatjuk-e, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást? Igaz-e az állítás a magasságok esetében?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

312. Az a hosszúságú szakaszt két különböző nagyságú részre osztották fel. Határozzátok meg a keletkezett szakaszok felezőpontjai közötti távolságot!

313. Az ABC háromszög BM súlyvonala egyenlő az MC szakasz hosszával. Mekkora az ABC háromszög kerülete, ha az ABM kerülete 16 cm és $BC = 8$ cm?

314. Az M és az N pontok az ABC háromszög AB és BC oldalainak felezőpontjai. Az MBN háromszög kerülete kétszer kisebb az ABC háromszög kerületénél. Mekkora az MN szakasz, ha $AC = 10$ cm?

315. Egy 22 cm kerületű háromszöget az egyik súlyvonala két olyan háromszögre osztja, melyek kerületei 12 cm és 16 cm. Határozzátok meg a súlyvonal hosszát!

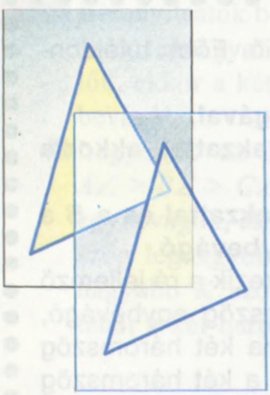
316. Az a és b párhuzamos egyeneseket egy c egyenessel metszettek. Az így keletkezett társszögek aránya 2 : 3. Milyen ezen szögek szögfelezői és a metsző egyenes által alkotott szögek aránya?

11. §. A mértani alakzatok egybevágósága

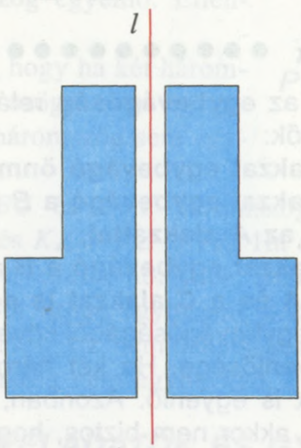
A 136. ábrán két háromszög látható. Az egyiket papírlapra rajzolták, a másikat áttetsző pauszpapírra. A két háromszög mozgatással fedésbe hozható. Azt mondják, ha két háromszög *mozgatással fedésbe hozható*, akkor *egybevágó*. Nem csak a háromszögek, de a szakaszok, szögek, körvonalak és egyéb mértani alakzatok is lehetnek egybevágók.

A 137. ábrán látható mértani alakzatok is egybevágók, mert ha a papírlapot az l egyenes mentén kettéhajtjuk, akkor a két alakzat fedni fogja egymást. Azonban a 138. ábrán lévő alakzatok már nem egybevágók.

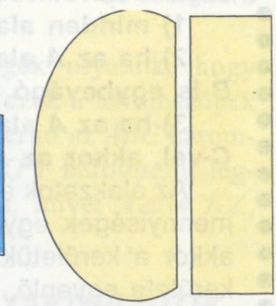
Az egybevágóság jelölésére az = jelet használjuk. Például $AB = KP$, $A\angle = B\angle$, $ABC\triangle = KPT\triangle$.



■ 136. ábra



■ 137. ábra



■ 138. ábra

! Ha két háromszög mindegyike egybevágó egy harmadik háromszöggel, akkor egymással is egybevágók.

Egybevágó alakzatokkal nagyon sok helyen találkozhatunk, és számtalan szakma alkalmazza azokat. Egybevágó téglalapok a fémlemezek, üveglapok, járólapok, csempék, parketták. Egy csomag papír lapjai is és egy adott márkájú gépkocsi alkatrészei is egybevágók.

Ahhoz, hogy eldöntsük egybevágó-e két alakzat, meg kell próbálni fedésbe hozni őket. Ez a gyakorlatban nem mindig kivitelezhető. Ezzel a módszerrel nem lehet eldönteni például két földrészlegről, hogy egybevágó-e. Ezért más módszereket kellett keresni. Meg kellett határozni azokat az ismertetőjeleket, melyek alapján eldönthető két különböző mértani alakzatról, hogy egybevágó-e? Például, ha két körlap sugara egyenlő, akkor a két körlap egybevágó. Ez a körlapok egybevágóságának ismertetőjele. A következő fejezetben a háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleivel fogunk foglalkozni.

MEGJEGYZÉS.

Az A, B és C csúcsú háromszöget többféleképpen is jelölhetjük: $ABC\triangle$, $BCA\triangle$, $CAB\triangle$, $BAC\triangle$ stb. A megállapodás szerint, ha két háromszög egybevágó, akkor a megfelelő szögeik, oldalaik egyenlők. Tehát, ha $ABC\triangle = KPT\triangle$, akkor $A\angle = K\angle$, $B\angle = P\angle$, $C\angle = T\angle$, $AB = KP$, $AC = KT$, $BC = PT$.

Érdeklődőknek

A mértanban az **egybevágóság** reláció. Főbb tulajdonságai a következők:

1) minden alakzat egybevágó önmagával;

2) ha az *A* alakzat egybevágó a *B* alakzattal, akkor a *B* is egybevágó az *A* alakzattal;

3) ha az *A* alakzat egybevágó a *B* alakzattal és a *B* a *C*-vel, akkor az *A* és a *C* alakzat is egybevágó.

Az alakzatok egybevágóságából következik a rá jellemző mennyiségek egyenlősége. Ha két háromszög egybevágó, akkor a kerületük is egyenlő. Azonban, ha két háromszög kerülete egyenlő, akkor nem biztos, hogy a két háromszög egybevágó. Ugyanígy, ha két háromszög egybevágó, akkor a területük is egyenlő, de ha a területük egyenlő, akkor nem biztos, hogy a két háromszög egybevágó.

Gyakran két mértani alakzat egybevágóságának igazolása visszavezethető a háromszögek egybevágóságára. Ezért nagyon fontos a háromszögek egybevágóságának ismerete. Az iskolai tananyagban a mértani bizonyítások többsége a háromszögek egybevágóságán alapszik.

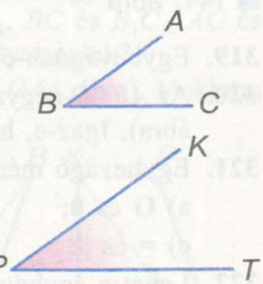
? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Milyen alakzatokat nevezünk egybevágóknak?
2. Milyen jelet használunk az egybevágóság jelölésére?
3. Fogalmazzátok meg az egybevágósági reláció tulajdonságait!
4. Fogalmazzátok meg két körvonal egybevágóságának ismertetőjelét!

• Oldjuk meg közösen!

1. Egyenlők-e a 139. ábrán látható szögek?

A szöget félegyenesek alkotják, és bár a rajzon az egyik szög szárai rövidebbnek tűnnek, nem szabad elfelejtkezni arról, hogy a félegyenes végtelen. Mivel mind a két szög 35°-os, ezért ez a két szög egyenlő. Ellenőrizzétek!



139. ábra

2. Bizonyítsátok be, hogy ha két háromszög legnagyobb szögei nem egyenlők, akkor a két háromszög sem egybevágó!

Legyenek az ABC és KPT háromszögek olyanok, hogy $A\angle > B\angle > C\angle$ és $K\angle > P\angle > T\angle$. Ha ezek a háromszögek egybevágók, akkor fedésbe hozhatók. Eszerint az ABC háromszög legnagyobb A szöge egybeesne a KPT háromszög legnagyobb K szögével. Ez nem lehetséges, mivel $A\angle \neq K\angle$, tehát a két háromszög nem egybevágó.

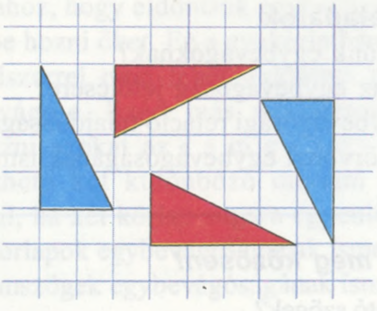
FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

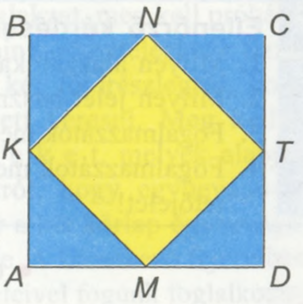
317. Egybevágóak-e a 140. ábrán látható alakzatok?

318. Igaz-e, hogy egy derékszögű, tompaszögű, illetve egyenlő oldalú háromszöggel egybevágó háromszög derékszögű, tompaszögű, egyenlő oldalú?

140. ábra



141. ábra



142. ábra

319. Egybevágóak-e a 141. ábrán látható háromszögek?

320. Az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjait sorban összekötötték (142. ábra). Igaz-e, hogy a keletkezett háromszögek egybevágóak?

321. Egybevágó mértani alakzatok-e a következő jelek:

a) **O** és **0**; b) < és >;

c) = és ||; d) **Γ** és **L**?

322. Lehet-e egybevágó egy derékszögű és egy tompaszögű háromszög? Egy derékszögű és egy hegyesszögű?

323. Az ABC és KPT háromszögek egybevágók. Egyenlő-e a két háromszög kerülete?

324. Az ABC és a KPT háromszög kerülete egyenlő. Egybevágó-e a két háromszög?

325. Két mellékszög egybevág egymással. Milyen e szögek fokmértéke?

326. A 143. ábrán lévő alakzatok közül melyek egybevágók?

143. ábra

A

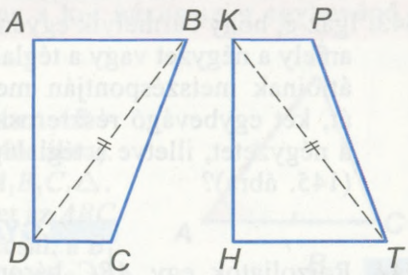
327. Lehet-e egybevágó két olyan háromszög, melyek legrövidebb oldalai nem egyenlők?

328. A körvonal középpontján átmenő egyenes a körvonalat két félkörre osztja. Egybevágóak-e ezek a részek? Hogyan ellenőrizhetitek az állításotokat?

329. Határozzátok meg a KPT háromszög kerületét, ha az egybevágó az ABC háromszöggel és $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm és $AC = 5$ cm!

330. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket úgy helyezték egymásra, hogy az A csúcs egybeesett az A_1 csúccsal, a B a B_1-gyel, a C pedig a C_1-gyel. Fedik-e egymást az AB és A_1B_1, BC és B_1C_1, AC és A_1C_1 oldalak, valamint az AM és A_1M_1 súlyvonalak?

331. Az $ABCD$ és $HTPK$ egybevágó négyszögek (144. ábra). Mekkora a T szög és a KT szakasz hossza, ha $BD = 3{,}8$ cm és $B\angle = 70°$?



144. ábra

332. Hány fokosak az ABC háromszög szögei, ha $ABC\triangle = KPT\triangle$, $K\angle = 60°$ és $P\angle = 60°$?

333. Az AB és a PT oldalak nem egyenlők. Lehet-e egybevágó az ABC és KPT háromszög?

B

334. Az ABC és KPT szögek egybevágók. Hányféleképpen lehet a két szöget fedésbe hozni?

335. Az ABC háromszög tompaszögű, az $A_1B_1C_1$ háromszög szögeinek aránya pedig 5 : 6 : 7. Egybevágó-e ez a két háromszög?

336. Az $ABC\triangle = MNK\triangle$ és az $N\angle = 2A\angle$. Mekkorák a háromszögek szögei, ha $C\angle = 60°$?

337. Az AOB és BOC szögek mellékszögek és $BOC\angle - AOB\angle = 30°$. A PKN és az MKP szögek is mellékszögek, és $MKP\angle : PKN\angle = 7 : 5$. Nevezzétek meg az egyenlő szögpárokat, ha vannak!

338. Az $ABCD$ és $MNKP$ téglalapok kerületei egyenlők. Mindkettő 28 cm. Készítsetek egy olyan rajzot, amelyen a téglalapok: a) egybevágóak; b) nem egybevágóak!

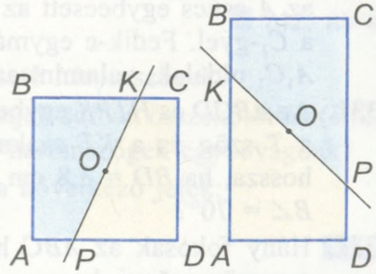
339. Az $ABCD$ téglalap egyik oldala 3 cm-rel hosszabb a másiknál, kerülete pedig 34 cm. Az $MNPK$ téglalap területe 70 cm^2. Lehet-e ez a két téglalap egybevágó? És ha az $MNKP$ téglalap területe 72 cm^2?

340. Rajzoljatok koordináta-rendszert, és jelöljétek meg rajta az $A(1; 4)$, $B(2; 7)$, $C(2; 4)$, $D(2; 1)$ és $K(4; 1)$ pontokat! Egybevágók-e az ABC és ADC háromszögek? Az ABC és CDK háromszögek?

341. Az $ABCD$ és $KPTM$ két egybevágó téglalap és $AB = KP$. Mekkora a KT szakasz hossza, ha $AC = 26$ cm?

342. Az A, B, C, D és E pontok öt egyenlő részre osztják az O középpontú körvonalat. Egyenlő hosszúságúak-e az AB és EA szakaszok? Egybevágóak-e az OBC és OAE háromszögek?

343. Igaz-e, hogy bármelyik egyenes, amely a négyzet vagy a téglalap átlóinak metszéspontján megy át, két egybevágó részre osztja a négyzetet, illetve a téglalapot (145. ábra)?



145. ábra

GYAKORLATI FELADAT

344. Rajzoljatok egy ABC háromszöget papírlapra és egy $A_1B_1C_1$ háromszöget pauszpapírra úgy, hogy fedésbe hozhatók legyenek!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

345. Rajzoljatok egy 6 cm átmérőjű körlapot! Mekkora a körlap területe és a körvonal hossza?

346. Rajzoljatok egy 3 cm sugarú körlapot! Osszátok fel öt egyenlő körcikkre! Színezzétek ki az egyik körcikket, és számítsátok ki a területét!

347. Hány részre oszthatja fel a síkot két körvonal? Három körvonal?

348. Hány hektár annak a körlapnak a területe, melynek az átmérője 1 km?

349. Az ABC háromszögben az A szög 70°-os, a B szög 20°-kal nagyobb, mint a C szög? Hány fokos szöget zárnak be a B és a C szögek szögfelezői?

350. Az ABC háromszög minden szöge egyenlő fokmértékű. Bizonyítsátok be, hogy bármelyik két szög szögfelezője közötti szög egyenlő!

12. §. *A háromszögek egybevágóságának ismertetőjelei*

Ha az ABC és $A_1B_1C_1$ egybevágó háromszögek, akkor egymásra téve fedik egymást, azaz az A csúcs egybeesik az A_1 csúccsal, a B a B_1 csúccsal, a C pedig a C_1-gyel. Márpedig, ha ez így van, akkor az AB oldal egybeesik az A_1B_1-gyel, BC a B_1C_1-gyel, AC pedig az A_1C_1 oldallal. Tehát, ha az $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$, akkor $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$.

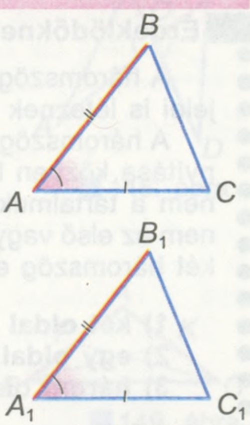
Ahhoz, hogy meggyőződjünk arról, hogy a két háromszög egybevágó, nincs szükség mind a hat egyenlőség igazolására.

! **10. tantétel.** (háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele) **Ha az egyik háromszög két oldala és az általuk bezárt szög egyenlő egy másik háromszög megfelelő két oldalával és az általuk bezárt szöggel, akkor a két háromszög egybevágó.**

■ BIZONYÍTÁS.

Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ és $A\angle = A_1\angle$ (146. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$.

Helyezzük az $A_1B_1C_1$ háromszöget az ABC háromszögre úgy, hogy A_1 az A csúccsal, a B_1 a B-vel essen egybe, az A_1C_1 oldal pedig az AC félegyenesre kerüljön. Ezt megtehetjük, mivel a feltételek szerint $A_1B_1 = AB$ és $A_1\angle = A\angle$. Mivel $A_1C_1 = AC$, ezért a C_1 csúcs egybeesik a C csúccsal. Tehát a két háromszög minden csúcsa fedi egymást, így $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$.

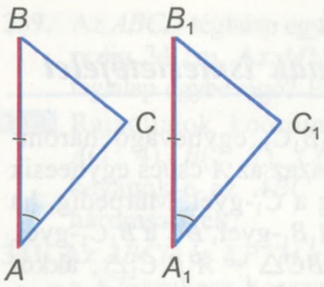


146. ábra

! **11. tantétel.** (háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele) **Ha az egyik háromszög egyik oldala és rajta fekvő két szöge egyenlő egy másik háromszög megfelelő oldalával és rajta fekvő két szögével, akkor a két háromszög egybevágó.**

■ BIZONYÍTÁS.

Legyen az ABC és $A_1B_1C_1$ két olyan háromszög, amelyekben $AB = A_1B_1$, $A\angle = A_1\angle$ és $B\angle = B_1\angle$ (147. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$.



147. ábra

Helyezzük az $A_1B_1C_1$ háromszöget az ABC háromszögre úgy, hogy A_1 csúcs az A csúcsra, a B_1 a B csúcsra essen, az oldal pedig az AC-re kerüljön. Ezt megtehetjük, mivel a feltételek szerint $A_1B_1 = AB$ és $A_1\angle = A\angle$. Mivel $B\angle = B_1\angle$, ezért a B_1C_1 oldal egybeesik a BC oldallal. Azaz egy ilyen ráhelyezés során az A_1C_1 félegyenes egybeesik az AC félegyenessel, a B_1C_1 pedig a BC-vel. Az A_1C_1 és B_1C_1 félegyenesek C_1metszéspontja egybeesik az AC és BC félegyenesek metszéspontjával, vagyis a C csúccsal. Tehát a két háromszög minden csúcsa fedi egymást, így $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$.□

Érdeklődőknek

A háromszögek egybevágóságának még más ismertetőjelei is léteznek (lásd a 14. tételt).

A háromszögek egybevágóságára nagyon sok tétel bizonyítása közben hivatkozunk, ezért nem a számozásuk, hanem a tartalmuk alapján célszerű megjegyezni őket. Tehát nem az első vagy második ismertetőjelre hivatkozunk, hanem két háromszög egybevágóságáról beszélünk:

1) két oldal és az általuk közbezárt szög alapján;
2) egy oldal és a rajta fekvő két szög alapján;
3) három oldal (később bizonyítjuk) alapján.

Ezeket általános ismertetőjeleknek nevezzük, mert tetszőleges háromszögekre érvényesek. Külön ismertetőjelek alapján lehet meghatározni a derékszögű háromszögek vagy az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságát.

Két egyenlő oldalú háromszög akkor egybevágó, ha van olyan megfelelő oldalpár, melyek hossza egyenlő.

Próbáljátok bebizonyítani ezt az ismertetőjelet az általános ismertetőjelek alkalmazásával!

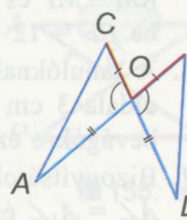
? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjelét!
2. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjelét!
3. Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát két oldal és az általuk közbezárt szög alapján!
4. Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát egy oldal és a rajta fekvő két szög alapján!

• *Oldjuk meg közösen!*

1. Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $AC = BD$, ha $AO = OD$ és $CO = OB$!

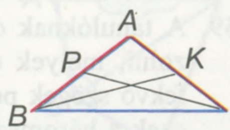
■ Az AOC és DBO háromszögek O csúcsánál lévő szögek egyenlők, mivel csúcsszögek (148. ábra). Az $AO = OD$ és $CO = OB$ megfelelő oldalak szintén egyenlők! A háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján az $ACO\triangle = DBO\triangle$. Így a megfelelő AC és BD oldalak is egyenlők.



■ 148. ábra

2. Egy háromszög két oldala egyenlő. Bizonyítsátok be, hogy az ezekhez az oldalakhoz tartozó súlyvonalak is egyenlők!

■ Az ABC háromszögben az $AB = AC$, BK és CP pedig a megfelelő súlyvonalak (149. ábra). $AP = AK$, mivel az egyenlő hosszúságú oldalak fele is egyenlő. Tehát $ABK\triangle = ACP\triangle$, mert két oldaluk és az általuk bezárt szög egyenlő: $AB = AC$, $AK = AP$ és az A szög közös. Tehát $BK = CP$.

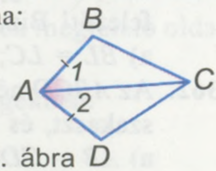


■ 149. ábra

• *FELADATOK ÉS GYAKORLATOK*

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

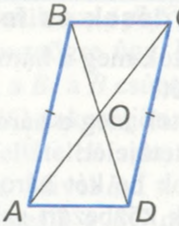
351. A 150. ábra alapján bizonyítsátok be, hogy ha:
a) $AB = AD$ és $1\angle = 2\angle$, akkor $ABC\triangle = ADC\triangle$;
b) $1\angle = 2\angle$ és $B\angle = D\angle$, akkor $ABC\triangle = ADC\triangle$.



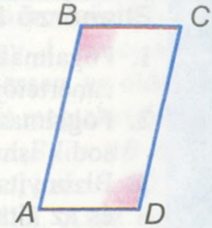
■ 150. ábra

352. A 151. ábrán $AB = CD$ és $AB \parallel CD$. Bizonyítsátok be, hogy $AOB\triangle = COD\triangle$!

353. Az $ABCD$ négyszögben $AB \parallel CD$ és $BC \parallel AD$ (152. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $B\angle = D\angle$!



151. ábra



152. ábra

A

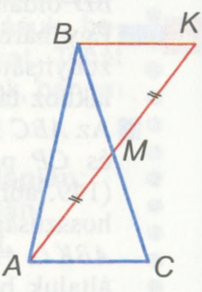
354. Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $AOC\triangle = BOD\triangle$, ha $AO = OB$ és $CO = OD$!

355. A KP és az EF szakaszok az M pontban metszik egymást. $KM = MP$ és $EM = MF$. Határozzátok meg a KE szakasz hosszát, ha $PF = 12$ cm!

356. A tanulóknak olyan háromszöget kellett rajzolni, melyek két oldala 3 cm és 5 cm, az általuk bezárt szög pedig 60°. Egybevágók-e ezek a háromszögek?

357. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$, ha $AC = A_1C_1$, $A\angle = A_1\angle$ és $B\angle = B_1\angle$!

358. AM az ABC háromszög súlyvonala és $MK = MA$ (153. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az ACM és a KBM egybevágó háromszögek!



153. ábra

359. A tanulóknak olyan háromszöget kellett rajzolni, melyek egyik oldala 5 cm, és a rajta fekvő szögek pedig 30° és 70°. Egybevágók-e ezek a háromszögek?

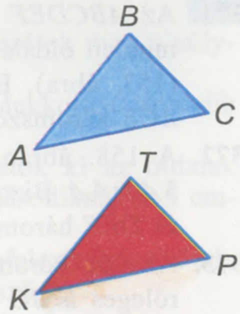
360. Az A szög szögfelezőjén felvettek egy D pontot, a szög szárain pedig egy B és C pontot úgy, hogy $BDA\angle = ADC\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $BD = CD$!

361. Az ABC egyenlő szárú háromszögben meghúzták az AL szögfelezőt! Bizonyítsátok be, hogy:
a) $BL = LC$; b) $AL \perp BC$!

362. Az $ABCD$ négyszögben $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Húzzátok meg a BD szakaszt, és bizonyítsátok be, hogy:
a) $AB = CD$; b) $BC = AD$; c) $A\angle = C\angle$!

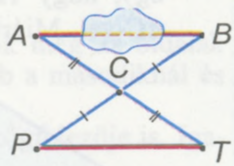
363. Egybevágóak-e a 154. ábrán látható háromszögek?

364. Ahhoz, hogy egy terepen megmérjük két megközelíthetetlen pont közötti távolságot, ki kell jelölni egy C pontot, melyből el lehet jutni az A és B pontig is (155. ábra). Majd az AC és BC egyeneseken felmérik a $CT = AC$ és $CP = BC$ szakaszokat. A PT távolság egyenlő az AB-vel. Miért?



154. ábra

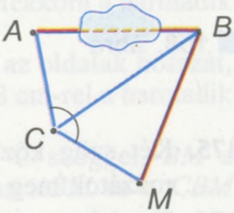
365. Az előző feladatot másképpen is meg lehet oldani (156. ábra). Felmérik a BCM és BCA szögeket és a $CM = CA$ szakaszokat. Ha $BCM\angle = BCA\angle$ és $CM = CA$, akkor $AB = BM$. Miért?



155. ábra

366. Az AB szakasz végpontjain keresztül AC és BD párhuzamos egyeneseket húztak. Majd a szakasz O felezőpontján át olyan egyenest, amely egy C és egy D pontban metszi az AC és a BD egyeneseket. Mekkora az AC szakasz hossza, ha $BD = 8$ cm?

367. Az AB és CD egyenlő hosszúságú szakaszok egy O pontban metszik egymást úgy, hogy $OA = OC$. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\angle = ADC\angle$ és $BAD\angle = BCD\angle$!



156. ábra

368. Az AB és CD szakaszok egy olyan O pontban metszik egymást, amely mind a két szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy $AC \parallel BD$!

B

369. Bizonyítsátok be, hogy egybevágó háromszögek megfelelő oldalaira húzott súlyvonalai egyenlők!

370. Bizonyítsátok be, hogy egybevágó háromszögekben:

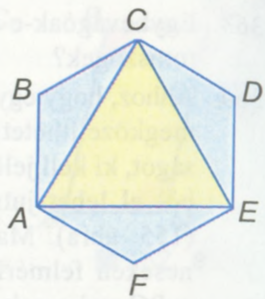
a) a megfelelő szögfelezők egyenlők;

b) a megfelelő magasságok egyenlők!

371. Az $ABCDEF$ hatszög szabályos, mivel minden oldala és minden szöge egyenlő (157. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az ACE háromszög egyenlő oldalú!

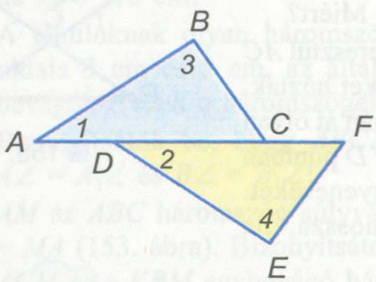
372. A 158. ábrán $AD = CF$, $1\angle = 2\angle$ és $3\angle = 4\angle$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC és DEF háromszögek egybevágók!

373. Az ABC háromszög AL szögfelezője merőleges a BC oldalra. Bizonyítsátok be, hogy $AB = AC$!

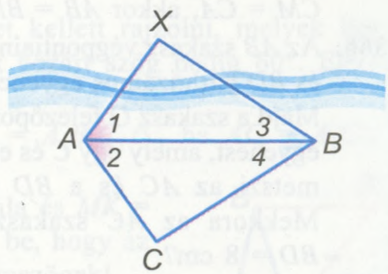


157. ábra

374. Ahhoz, hogy meghatározzák az A és az X pont között a távolságot (159. ábra), a folyó mentén megjelöltek egy A és egy C pontot úgy, hogy $1\angle = 2\angle$ és $3\angle = 4\angle$. Az AX távolság egyenlő AC-vel. Miért?



158. ábra



159. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

375. Két szög közül az egyik 40°-kal nagyobb a másiknál. Határozzátok meg ezeket a szögeket, ha mellékszögeik aránya 7 : 5!

376. Egy háromszög kerülete 28 cm. Vannak-e egyenlő szögei, ha két oldalának aránya 5 : 4, a harmadik oldal pedig 1 cm-rel nagyobb a másik két oldal félösszegénél?

377. Hány fokos szöget zár be a háromszög egyik csúcsánál lévő belső és külső szögének szögfelezője?

378. Hányféleképpen lehet egy téglalapot két egybevágó téglalapra szétvágni? És két egybevágó mértani alakzatra?

379*. Hogyan kell két egybevágó négyzetet szétvágni egybevágó részekre úgy, hogy egy újabb négyzetet lehessen kirakni belőlük?

3. számú önálló munka

1. változat

1°. Rajzoljatok hegyesszögű háromszöget! Húzzátok meg a súlyvonalait!

2°. Egy háromszög két szöge 35°-os és 68°-os. Mekkora a harmadik szög?

3•. Egy háromszög kerülete 35 cm. Számítsátok ki az oldalak hosszát, ha az egyik 3 cm-rel hosszabb a másodiknál és 5 cm-rel rövidebb a harmadik oldalnál!

4•. Az ABC háromszögben $AB = BC$ és BH szögfelező. Igazoljátok, hogy az ABH és a CBH egybevágó háromszögek!

2. változat

1°. Rajzoljatok derékszögű háromszöget! Húzzátok meg a szögfelezőit!

2°. Egy háromszög két szöge 120°-os és 57°-os. Mekkora a harmadik szög?

3•. Egy háromszög kerülete 50 m. Határozzátok meg az oldalak hosszát, ha az egyik oldala 8 m-rel hosszabb a másodiknál és 5 m-rel a harmadik oldalnál!

4•. A KPT háromszög PM magassága egyben szögfelezője is. Igazoljátok, hogy $KPM\triangle = TPM\triangle$!

3. változat

1°. Rajzoljatok tompaszögű háromszöget! Húzzátok meg a súlyvonalait!

2°. Egy háromszög két szöge 87°-os és 56°-os. Mekkora a harmadik szög?

3•. Egy téglalap kerülete 62 cm. Számítsátok ki az oldalak hosszát, ha az egyik 2-szer hosszabb a másodiknál és 8 cm-rel a harmadik oldalnál!

4•. Az ABC háromszögben A szög egyenlő a C szöggel. BM a háromszög magassága. Igazoljátok, hogy az ABM és a CBM egybevágó háromszögek!

4. változat

1°. Rajzoljatok tetszőleges háromszöget! Húzzátok meg a magasságukat!

2°. Egy háromszög két szöge 130°-os és 25°-os. Mekkora a harmadik szög?

3•. Egy téglalap kerülete 85 m. Számítsátok ki az oldalak hosszát, ha az egyik 2-szer rövidebb a másodiknál és 1 m-rel rövidebb a harmadik oldalnál!

4•. A KPT háromszög PH magassága egyben súlyvonal is. Igazoljátok, hogy a KPH és a TPH háromszögek egybevágók!

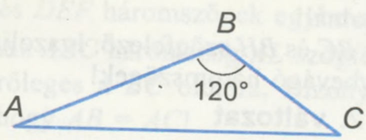
Rajzos feladatok

A

1

$\underline{A\angle = \frac{2}{3} C\angle.}$

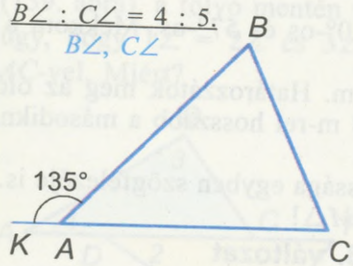
$A\angle,\ C\angle$



2

$\underline{B\angle : C\angle = 4 : 5.}$

$B\angle,\ C\angle$

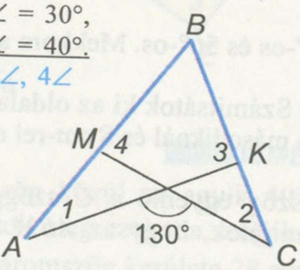


3

$1\angle = 30°,$

$\underline{2\angle = 40°.}$

$3\angle,\ 4\angle$

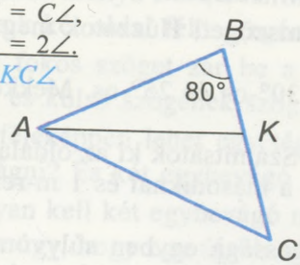


4

$A\angle = C\angle,$

$\underline{1\angle = 2\angle.}$

$AKC\angle$

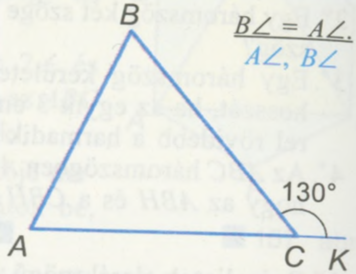


B

1

$\underline{B\angle = A\angle.}$

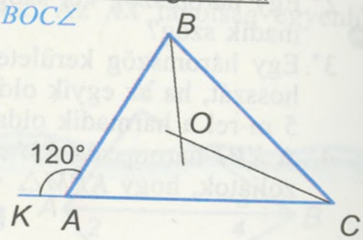
$A\angle,\ B\angle$



2

$\underline{BO,\ CO}$ – szögfelezők.

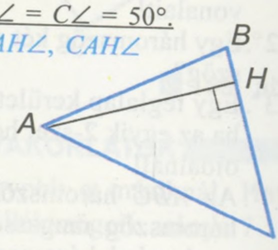
$BOC\angle$



3

$\underline{CAB\angle = C\angle = 50°.}$

$BAH\angle,\ CAH\angle$

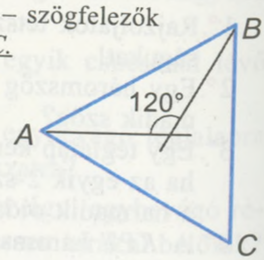


4

$AO,\ BO$ – szögfelezők

$\underline{AB = BC.}$

$B\angle,\ C\angle$



1. Mi a háromszög?
2. Sorold fel a háromszög elemeit!
3. Milyen háromszögeket különböztetünk meg? Melyek az egyes háromszögek legjellemzőbb tulajdonságai?
4. Mit tudunk a háromszög szögfelezőjéről, súlyvonaláról, magasságáról?
5. Miben különbözik a háromszög szögfelezője a szög felezőjétől?
6. Fogalmazzátok meg a háromszög szögeinek összegéről szóló tételt!
7. Mi a háromszög külső szöge?
8. Fogalmazzátok meg a háromszög külső szögéről szóló tételt!
9. Igaz-e, hogy a háromszög külső szöge nagyobb bármely vele nem szomszédos belső szögnél?
10. Mennyi a négyszög szögeinek összege?
11. Milyen alakzatokat nevezünk egybevágóknak?
12. Milyen viszonyító jellel jelöljük az alakzatok egybevágóságát?
13. Fogalmazzátok meg az alakzatok egybevágóságának tulajdonságait!
14. Fogalmazzátok meg két kör egybevágóságának ismérvét!
15. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjelét!
16. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjelét!
17. Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát két oldaluk és a közöttük levő szög egyenlősége alapján!
18. Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát egy oldaluk és a rajtuk fekvő szögek egyenlősége alapján!

• 3. számú teszt feladatsor

1.	A háromszög egyik szöge 40°, a másik 20°-kal nagyobb. A harmadik szög:	a) 100°; b) 80°; c) 60°; d) 120 °.
2.	A háromszög külső szögeinek mértéke 100° és 120°. A háromszög harmadik csúcsánál levő belső szög:	a) 60°; b) 90°; c) 40°; d) 80°.
3.	A háromszög szögeinek mértéke úgy aránylik egymáshoz, mint 2, 3 és 5. A háromszög legkisebb szöge:	a) 30°; b) 54°; c) 28°; d) 36°.
4.	$ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. Milyen jelet kell tenni a * helyett: $A\angle * A_1\angle$?	a) <; b) =; c) >; d) ≠.
5.	$ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. Milyen jelet kell tenni a * helyett: $AB * A_1B_1$?	a) <; b) >; c) =; d) ≠.
6.	$ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm. Az $A_1B_1C_1\triangle$ kerülete 21 cm. A BC hossza:	a) 11 cm; b) 19 cm; c) 10 cm; d) 9 cm.
7.	$ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. $A\angle = 70°$, $B\angle = 60°$. A $C_1\angle$ mértéke:	a) 50°; b) 90°; c) 30°; d) 70°.

A 8–10. feladatok megoldásakor vegyétek figyelembe, hogy az AB és CD szakaszok úgy metszik egymást az O pontban, hogy $AO = BO$ és $CO = DO$.

8.	Az $AOC\triangle$-gel egyenlő:	a) az $AOD\triangle$; b) a $BOD\triangle$; c) a $COB\triangle$; d) a $CBD\triangle$.
9.	Az $OAC\angle$-gel egyenlő:	a) az $ODB\angle$; b) az $OBD\angle$; c) a $BOD\angle$; d) az $AOD\angle$.
10.	A hibás állítás:	a) $AC = BD$; b) $AC \parallel BD$; c) $AB \parallel CD$; d) $AO = OB$.

Ellenőrző dolgozat típusfeladatai

1°. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget, és húzzatok súlyvonalat, szögfelezőt és magasságot a legnagyobb oldalhoz!

2°. A háromszög két szöge 95° és 43°. Számítsátok ki a háromszög harmadik szögét!

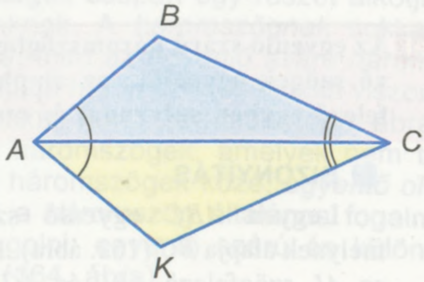
3°. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit, ha az $ABC\angle = KPT\angle$, melyben a $K\angle = 70°$, a $P\angle = 50°$!

4°. Határozzátok meg a KLM háromszög kerületét, ha $KLM\triangle = ABC\triangle$ és $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $AC = 4$ cm!

5•. Az $ABC\triangle$ magassága BK. Határozzátok meg AC hosszát, ha $AK = 5$ cm, $KC = 11$ cm, $A\angle = 120°$!

6•. Az AB és KP szakaszok úgy metszik egymást az O pontban, hogy $OA = OB$, $OK = OP$. Bizonyítsátok be, hogy $AOP\triangle = BOK\triangle$!

7•. A 160. ábrán az ABC és AKC háromszögekben $BAC\angle = KAC\angle$ és $BCA\angle = KCA\angle$.
Bizonyítsátok be, hogy $AB = AK$!



160. ábra

8•. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha külső szögei úgy aránylanak, mint 3, 7 és 8!

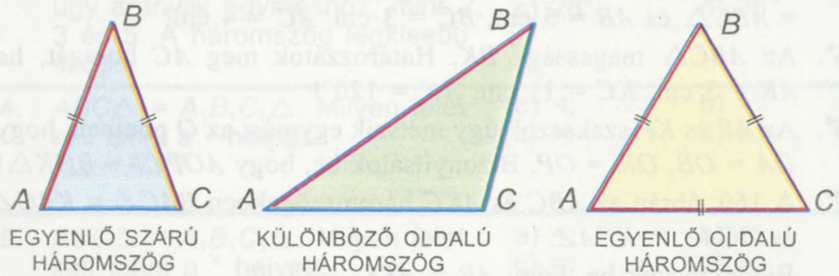
9••. Az ABC háromszögben két magasság, az AP és a BH van megrajzolva. Bizonyítsátok be, hogy $AP = BH$, ha $PC = HC$!

10••. Az ABC háromszögben két súlyvonal, az AP és a BH van megrajzolva. Bizonyítsátok be, hogy $APC\triangle = BHC\triangle$, ha $AC = BC$!

13. §. *Az egyenlő szárú háromszög*

A háromszög *egyenlő szárú*, ha két oldala egyenlő egymással. Az egyenlő oldalak a háromszög *szárai*, a harmadik oldal a háromszög *alapja*.

A nem egyenlő szárú háromszöget *különböző oldalú* háromszögnek nevezzük. Azt a háromszöget, melynek minden oldala egyenlő egymással, *egyenlő oldalú* háromszögnek nevezzük. Az egyenlő oldalú háromszög az egyenlő szárú háromszög sajátságos esete (161. ábra).



161. ábra

! **12. tantétel.** **Az egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők, az alaphoz húzott szögfelező egyben súlyvonal és magasság is.**

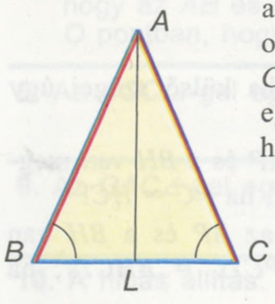
BIZONYÍTÁS

Legyen ABC egyenlő szárú háromszög, melynek alapja BC (162. ábra). Ezt a háromszöget az AL szögfelező ABL és ACL háromszögekre osztja. Mivel $AB = AC$, AL közös oldal, $BAL\angle = CAL\angle$, ezért a két oldal és a közöttük levő szögek egyenlősége alapján $ABL\triangle = ACL\triangle$. A háromszögek egyenlőségéből következik:

a) $B\angle = C\angle$, vagyis az $ABC\triangle$ alapján fekvő szögek egyenlők;

b) $BL = CL$, azaz AL az $ABC\triangle$ súlyvonala;

c) $ALB\angle = ALC\angle = 90°$, tehát AL az $ABC\triangle$ magassága.□



162. ábra

! **13. tantétel** **Ha a háromszög két szöge egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.**

BIZONYÍTÁS.

Legyen az $ABC\triangle$-ben $B\angle = C\angle$ (162. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $AB = AC$.

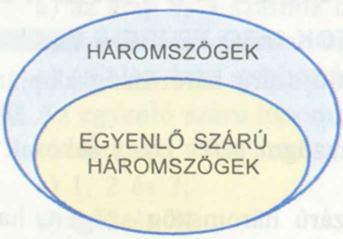
Megrajzoljuk az AL szögfelezőt. A szögfelező két részre osztja az adott háromszöget: $ABL\triangle$-re és $ACL\triangle$-re. Ezekben a háromszögekben $B\angle = C\angle$ és $BAL\angle = CAL\angle$, ezért $ALB\angle = ALC\angle$. Az AL oldal és a hozzá tartozó szögek alapján $BAL\triangle = CAL\triangle$. Tehát $AB = AC$. □

A 12. és 13. tantételekből adódik a k ö v e t k e z m é n y:

! **A háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek, egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak fekszenek.**

Érdeklődőknek

Milyen kölcsönös viszony van általában a *háromszögek* és az *egyenlő szárú háromszögek* között? Az egyenlő szárú háromszögek csupán egy részét alkotják általában a háromszögeknek. A *háromszögnek* sokkal szélesebb az értelmezése, mint az *egyenlő szárú háromszögeknek.* A különböző fajtájú háromszögek közötti viszonyt az Euler-féle diagramokkal lehet szemléltetően ábrázolni (163. ábra). Azok a háromszögek, amelyek nem tartoznak az egyenlő szárú háromszögek közé, *egyenlő oldalú* háromszögek. Tehát a *háromszög* általános fogalmat két osztályra lehet tagolni: egyenlő szárú és különböző oldalú háromszögek (164. ábra).



163. ábra

164. ábra

? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Milyen háromszöget nevezünk egyenlő szárúnak?
2. Hogyan nevezzük az egyenlő szárú háromszög oldalait?
3. Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszög tulajdonságait!
4. Milyen háromszöget nevezünk egyenlő oldalúnak?
5. Milyen a kölcsönös viszony általában a háromszögek és az egyenlő szárú háromszögek fogalma között?

• Oldjuk meg közösen!

1. Az egyenlő szárú háromszög két oldala 2 cm és 6 cm. Mekkora a harmadik oldal hossza?

■ Az adott háromszög alapja nem lehet 6 cm, mert 2 cm + + 2 cm < 6 cm. Ebből következik, hogy az adott háromszög alapja 2 cm, szárai pedig 6 cm hosszúak.

Felelet. 6 cm.

2. Mutassátok meg a diagramon a háromszögek fogalma, valamint az egyenlő szárú és az egyenlő oldalú háromszögek fogalma közötti kölcsönös viszonyt!

■ Az egyenlő oldalú háromszög egyben egyenlő szárú háromszög is. Tehát a háromszögek fajtái egyenlő szárúak közötti kölcsönös összefüggés a 165. ábrán bemutatott vázlattal szemléltethető.

■ 165. ábra

• FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

380. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjánál fekvő szög nem lehet derékszög!

381. Az egyenlő szárú háromszög szárszöge[1] 120°. Hány fokosak az alapnál fekvő szögek?

382. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a csúcsnál fekvő szöge egyenlő az alapon fekvő szöggel!

[1] Szárai által bezárt szög.

383. Az egyenlő szárú háromszög alapjánál fekvő szög 70°-os. Határozzátok meg szárszögének mértékét!

384. Az egyenlő szárú háromszög oldalai 5 cm és 10 cm hosszúak. Melyik közülük az alap?

385. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög kerületét, ha alapja 10 cm, szárai pedig 20 cm hosszúak!

A

386. Az egyenlő szárú háromszög alapja 15 cm, szára pedig 26 cm. Határozzátok meg a háromszög kerületét!

387. Az egyenlő szárú háromszög kerülete 12 cm, szára 5 cm. Számítsátok ki az alapot!

388. Az egyenlő szárú háromszög szárszöge 80°. Határozzátok meg az alapon fekvő szögeket!

389. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge 30°. Határozzátok meg szárszögét!

390. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha:
a) egyik szöge 30°-kal nagyobb a többinél;
b) egyik szöge kétszerese a többinek!
Két esetet vizsgáljatok meg!

391. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben az egyenlő szárú háromszög valamelyik szöge 60°-os, akkor az ilyen háromszög egyenlő oldalú!

392. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszög szögei egyenlők egymással!

393. Az egyenlő szárú háromszög szárszöge 80°-os. Határozzátok meg:
a) az alap és a szárhoz húzott szögfelező közötti szöget;
b) a szár és a szárhoz húzott szögfelező közötti szöget;
c) az alap és a szárhoz húzott magasság közötti szöget!

394. Az egyenlő szárú háromszög kerülete 50 cm. Határozzátok meg oldalait, ha azok aránya:
a) 1, 2 és 2;
b) 3, 3 és 4!

395. Az egyenlő szárú háromszög szárszöge 30°-os. Határozzátok meg a szárakhoz húzott magasságok közötti szöget!

396. Ha a háromszög súlyvonala egyben magasság is, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú. Bizonyítsátok be!

397. Ha a háromszög magassága egyben szögfelező is, akkor a háromszög egyenlő szárú. Bizonyítsátok be!

398. Az $ABC\triangle$-ben $AB = BC$, $B\angle = 36°$, AK – szögfelező. Bizonyítsátok be, hogy $BK = KA = AC$!

B

399. Az $ABC\triangle$-ben $AB = BC$. Határozzátok meg a BD súlyvonal hosszát, ha az ABD és ABC háromszögek kerülete megfelelően 40 cm és 50 cm!

400. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszögekben a szárakhoz húzott szögfelezők egyenlők egymással!

401. Az AB és CD egyenlő szakaszok úgy metszik egymást az M pontban, hogy $AM = MD$. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\triangle = DCB\triangle$!

402. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalait, ha egyik oldala 30 cm-rel, a másik 40 cm-rel rövidebb a kerületénél!

403. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög két nem egyenlő szögének összege nagyobb, mint 90°!

404. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha:
a) két szög összege 60°;
b) két szög összege 150°;
c) egyik külső szöge 15°;
d) egyik külső szöge 115°!

405. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egyenlőségének ismérveit:
a) az alap és a rajta fekvő szög alapján;
b) az alap és a szemben fekvő szög alapján;
c) a szár és az alapon fekvő szög alapján!

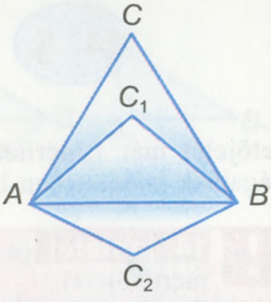
406. Határozzátok meg annak az egyenlő szárú háromszögnek a kerületét, melynek alapja a, szára b!

407. a) Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög alapját, ha kerülete $2p$, szára pedig b!
b) Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szárát, ha kerülete $2p$, alapja pedig a!

408. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszögben:
a) a súlyvonalak egyenlők;
b) a magasságok egyenlők;
c) a szögfelezők egyenlők!

409. Igazoljátok, hogy az egyenlő oldalú háromszöget 4 egyforma egyenlő oldalú háromszögre lehet szétvágni!

410. Hogyan vágható szét az egyenlő oldalú háromszög három egybevágó egyenlő szárú háromszögre?



166. ábra

411. Hogyan helyezkednek el a közös alappal bíró egyenlő szárú háromszögek magasságai (166. ábra)?

412. Két egyenlő szárú háromszöget négyszöggé illesztettek össze. Határozzátok meg a négyszög szögeit, ha a háromszögek szárszögei 110°-osak!

GYAKORLATI FELADAT

413. Vágjatok ki papírból egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű egyenlő szárú háromszöget! A szárszögük szögfelezője mentén összehajtva azokat, ismételjétek meg a 12. tantétel bizonyítását!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

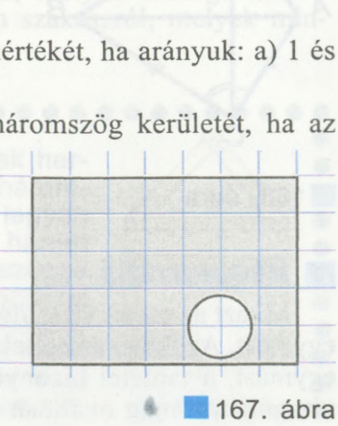
414. Határozzátok meg a szög mértékét, ha a szögfelező a szárral 48°-os szöget alkot!

415. Határozzátok meg a mellékszögek mértékét, ha arányuk: a) 1 és 2; b) 2 és 3!

416. Számítsátok ki az egyenlő oldalú háromszög kerületét, ha az 4 cm-rel nagyobb az oldalánál!

417. A háromszög oldalainak számtani közepe 10 dm. Számítsátok ki a kerületét!

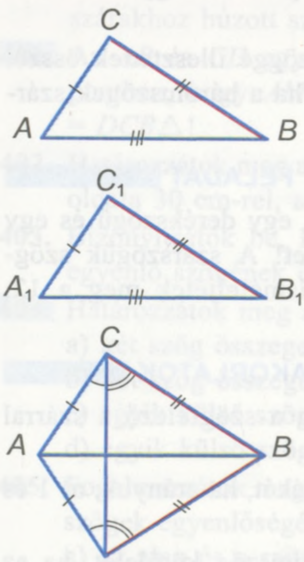
418. Másoljátok át a 167. ábrát a füzetbe és rajzoljatok egy olyan egyenest, mely két egyenlő területű részre osztja a rajzot!


167. ábra

14. §. *A háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele*

A háromszögek egybevágóságának két ismertetőjelét már ismeritek. Az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságainak ismeretében bebizonyíthatunk még egy ismertetőjelet.

! 14. tantétel. (a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele).
Ha egy háromszög három oldala megfelelően egyenlő egy másik háromszög három oldalával, akkor a háromszögek egybevágók.



168. ábra

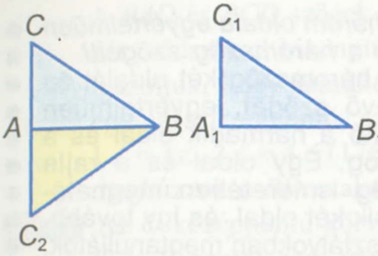
BIZONYÍTÁS.

Legyen az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ és $BC = B_1C_1$ (168. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$.

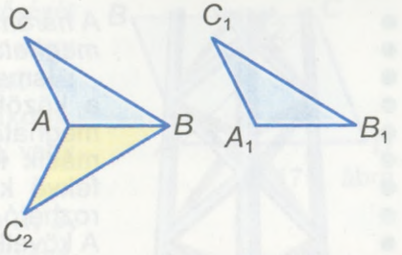
Illesszük az $A_1B_1C_1$ háromszöget az ABC háromszöghöz úgy, hogy az A_1 és A, a B_1 és B csúcsok egybeessenek, a C_1 és C csúcsok pedig az AB egyenes két oldalára kerüljenek. Ekkor az $A_1B_1C_1\triangle$ az $ABC_2\triangle$ helyzetet foglalja el. Meghúzva a CC_2 szakaszt, a CAC_2 és CBC_2 egyenlő szárú háromszögeket kapjuk, mivel $AC = AC_2$ és $BC = BC_2$. Ezekben a háromszögekben az alapon fekvő szögek egyenlők: $ACC_2\angle = AC_2C\angle$, $BCC_2\angle = BC_2C\angle$. Egyenlők az ACB és AC_2B szögek is. A két oldal és a közöttük levő szögből kifolyólag az $ABC\triangle = ABC_2\triangle$. Szerkesztés szerint az $ABC_2\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. Tehát $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$, amit be kellett bizonyítani. □

MEGJEGYZÉS

Mi azt az esetet vizsgáltuk, amikor az AB és CC_2 szakaszok metszik egymást. Azokban az esetekben, amikor ezek a szakaszok nem metszik egymást, a tantétel bizonyításán változtatni kell. Ezeket az eseteket vizsgáljátok meg önállóan a 169. és a 170. ábrák felhasználásával.



169. ábra



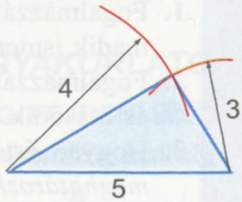
170. ábra

A háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele bizonyítja, hogy a háromszög egyértelműen meghatározható három oldala segítségével. Tegyük fel, hogy mindegyik hetedik osztályos háromszöget rajzol a füzetébe, melynek oldalai 3 cm, 4 cm és 5 cm. Az egyik először megrajzolja a legnagyobb oldalt, majd annak végpontjaiból 4 cm és 3 cm sugarú íveket rajzol (171. ábra). A másik először a legkisebb oldalt rajzolja meg az adott szakaszok közül, és így tovább. Jóllehet különböző módon készítették a rajzokat, végeredményben valamennyien egybevágó háromszögeket kaptak.

Felidézve a háromszögek egybevágóságának másik két ismertetőjelét, levonhatjuk az alábbi következtetést.

A háromszög egyértelműen meghatározható (megadható):

1) *két oldallal és a közbezárt szöggel;*
2) *egy oldallal és a rajta fekvő két szöggel;*
3) *három oldallal.*



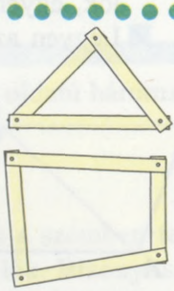
171. ábra

MEGJEGYZÉS

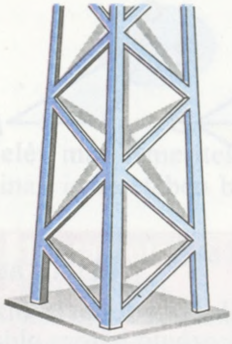
A 2. pontban olyan szögekről van szó, melyek összege kisebb 180°-nál, a 3. pontban pedig olyan három szakaszról, melyek mindegyike kisebb a másik kettő összegénél.

Érdeklődőknek

A háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele igazolja, hogy a háromszög *merev alakzat*. Hogy világosabb legyen miről is van szó, szegezzünk össze három lécet háromszöggé, négyet pedig négyszöggé (172. ábra). A négyszöget könnyű eltorzítani (deformálni): a négyszög szögeit változtathatjuk nem változtatva meg az oldalaik hosszát. A fából készült háromszöget nem lehet így eltorzítani, csak legfeljebb széttörni.



172. ábra



173. ábra

A háromszög három oldala egyértelműen meghatározza a háromszög szögeit!

Ismerve a háromszög két oldalát és a közöttük levő szöget, egyértelműen meghatározható a harmadik oldal és a másik két szög. Egy oldal és a rajta fekvő két szög ismeretében meghatározható a másik két oldal, és így tovább. A következő osztályokban megtanuljátok, hogyan kell ezeket elvégezni.

Annak ismeretében, hogy a sokszögek közül csak a háromszög merev alakzat, a nagy szilárdságot igénylő műszaki szerkezeteket úgy alakítják ki, hogy minél több legyen bennük a háromszög (173. ábra).

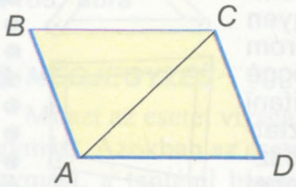
? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjelét!
2. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának első és második ismertetőjelét!
3. Hogyan értelmezed a következő kifejezést: *a háromszög meghatározható három oldala alapján?*
4. Milyen elemeivel határozható meg a háromszög?
5. Mit jelent az, hogy *a háromszög merev alakzat*?

Oldjuk meg közösen!

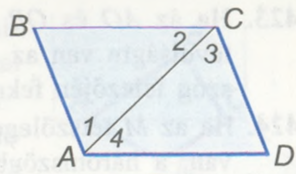
1. Bizonyítsátok be: ha a négyszög szemben fekvő oldalai egyenlők, egyenlők a szemben fekvő szögek is!

Legyen az $ABCD$ négyszögben $AB = CD$ és $BC = AD$ (174. ábra). Megrajzoljuk az AC szakaszt. Kapjuk az ABC és CDA háromszögeket. Ezek egybevágóak három oldaluk egyenlősége folytán: $AB = CD$, $BC = AD$, az AC oldal közös. Azaz $ABC\triangle = CDA\triangle$. Az egybevágó háromszögekben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek fekszenek. Tehát $B\angle = D\angle$.



174. ábra

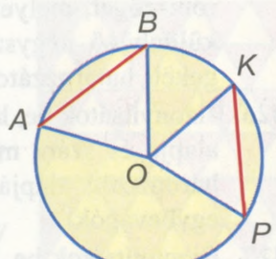
A BAD és BCD szögek egyenlőségét két módszerrel bizonyíthatjuk: vagy igazoljuk, hogy mindkét szöget két egymással egyenlő szög alkotja, $1\angle = 3\angle$, $2\angle = 4\angle$ (175. ábra), vagy meghúzzuk a BD szakaszt.



175. ábra

2. Az O középpontú körvonalon A, B, K és P pontok úgy vannak felvéve, hogy $AB = KP$ (176. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $AOB\triangle = KOP\triangle$!

Sugarakat húzva az adott pontokba megkapjuk az AOB és KOP háromszögeket. Ezek a háromszögek egybevágóak három oldaluk egyenlősége folytán, mivel $AB = KP$ a feltétel szerint, $OA = OB = OK = OP$ mint sugarak. Tehát $AOB\triangle = KOP\triangle$.



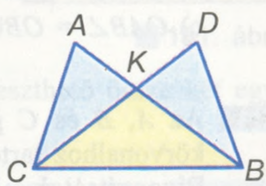
176. ábra

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

419. Az $ABC\triangle = KPT\triangle$. Számítsátok ki a KPT háromszög kerületét, ha:
a) az $ABC\triangle$ mindegyik oldala 5 cm;
b) $AB = BC = 3$ dm, $AC = 4$ dm!

420. A 177. ábrán $AB = CD$ és $AC = BD$. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $A\angle = D\angle$;
b) $BK = CK$;
c) $ACK\angle = DBK\angle$!



177. ábra

A

421. Az O pont egyenlő távolságra van az egyenlő oldalú háromszög A, B és C csúcsaitól. Bizonyítsátok be, hogy:
a) $AOB\angle = BOC\angle = AOC\angle$;
b) $OAB\angle = OBC\angle = OCA\angle$!

422. Ha a négyszög mindegyik oldala párhuzamos a szemben fekvő oldallal, akkor a szemben fekvő szögei egyenlők. Bizonyítsátok be!

423. Ha az AO és OB szakaszok egyenlők, és az X pont egyenlő távolságra van az A és B pontoktól, akkor az X pont az AOB szög felezőjén fekszik. Bizonyítsátok be!

424. Ha az M tetszőleges pont az ABC háromszög BH magasságán van, a háromszögben pedig $AB = BC$, akkor: a) $MA = MC$; b) $ABM\triangle = CBM\triangle$; c) $AMH\triangle = CMH\triangle$. Bizonyítsátok be!

425. Egyenlő oldalaikkal egymás mellé helyezve két egybevágó háromszöget, melyekben 30°-os és 70°-os szögek vannak, néhány különböző négyszöget kaphatunk. Rajzoljatok ilyen négyszögeket, határozzátok meg a keletkezett négyszögek szögeit!

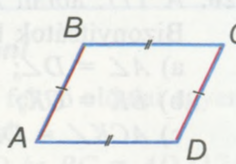
426. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben egy egyenlő szárú háromszög alapja és szára megfelelően egyenlő egy másik egyenlő szárú háromszög alapjával és szárával, akkor ezek a háromszögek egybevágók!

427. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben egy egyenlő oldalú háromszög egy oldala megfelelően egyenlő egy másik egyenlő oldalú háromszög oldalával, akkor a háromszögek egybevágók!

428. Az A, B és C pontok az O középpontú körvonalhoz tartoznak. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben $AB = BC = CA$, akkor:
a) $OAB\triangle = OBC\triangle = OCA\triangle$;
b) $AOB\angle = BOC\angle = COA\angle = 120°$;
c) $OAB\angle = OBC\angle = OCA\angle = 30°$!

B

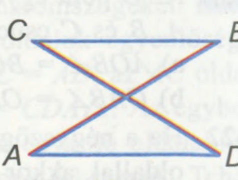
429. Az A, B és C pontok az O középpontú körvonalhoz tartoznak, AM pedig átmérő. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben $AB = BC = CA$, akkor:
a) $BM = CM$;
b) $OBM\angle = OCM\angle$!



178. ábra

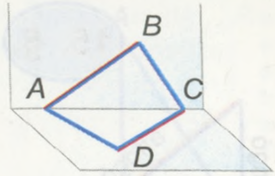
430. Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát két adott oldaluk, valamint az egyik oldalhoz húzott súlyvonal alapján!

431. Az $ABCDA$ zárt töröttvonalban $AB = CD$ és $AD = BC$. Bizonyítsátok be, hogy $A\angle = C\angle$ és $B\angle = D\angle$! Két esetet vizsgáljatok meg (178. és 179. ábra)!



179. ábra

432. Próbáljátok a 431. feladatot általánosítani arra az esetre, ha az adott töröttvonal nem egy síkban fekszik (180. ábra).



180. ábra

433. Az APC és ABC egyenlő szárú háromszögek AC oldala közös. Az AC oldalt a PB egyenes az O pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy:

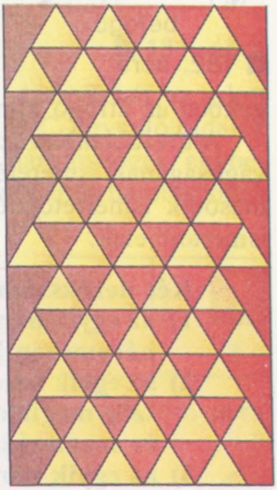
a) $PAB\angle = PCB\angle$;

b) $AO = OC$;

c) $AC \perp BP$!

434. Összerakható-e négy bármilyen egybevágó háromszögből egy háromszög? Mutassátok be rajzon!

435. Egyenlő szárú háromszögekkel mintegy parkettával be lehet burkolni teljes felületeket (181. ábra). Beburkolható-e egy felület egybevágó nem egyenlő oldalú háromszögekkel? Ha igen, rajzoljátok le!



181. ábra

436. Két egybevágó egyenlő oldalú ABC és KPT háromszöget csak egyféleképpen lehet összeilleszteni. Két egybevágó egyenlő szárú háromszöget kétféleképpen, összeillesztve az AB oldalt a KP-vel, vagy a TP-vel. Hányféleképpen illeszthető össze két egybevágó, különböző oldalú háromszög?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

437. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha azok aránya 2, 3 és 4!

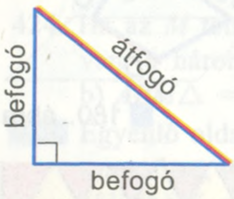
438. Határozzátok meg a háromszög szögeinek számtani közepét!

439. A háromszög oldalainak számtani közepe 20 cm. Határozzátok meg a kerületét!

440. A háromszög félkerülete p. Határozzátok meg oldalai számtani közepét!

441. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög szögeinek összege 360°! Határozzátok meg a négyszög szögeinek számtani közepét!

15. §. A derékszögű háromszög



182. ábra

Derékszögűnek nevezzük azt a háromszöget, amelynek egyik szöge derékszög. Másik két szögének összege 90°, mivel 180° – 90° = 90°.

A derékszögű háromszögben a derékszöggel szemben fekvő oldalt *átfogónak*, a másik két oldalt pedig *befogónak* nevezzük (182. ábra). Néha a rajzokon a derékszöget kis négyzetecskével jelölik. A derékszögű háromszögekben az átfogó mindig nagyobb bármelyik befogónál.

A továbbiakban szükségünk lesz a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismeretére. A háromszögek egybevágóságának első és második ismertetőjeléből (12. §.) egyenesen következnek az alábbi ismertetőjelek.

! Két derékszögű háromszög egybevágó, ha:
1) az egyik háromszög befogói megfelelően egyenlők a másik háromszög befogóival;
2) az egyik háromszög befogója és a vele szomszédos hegyesszög megfelelően egyenlő a másik háromszög befogójával és szomszédos hegyesszögével;
3) az egyik háromszög átfogója és hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik háromszög átfogójával és hegyesszögével.

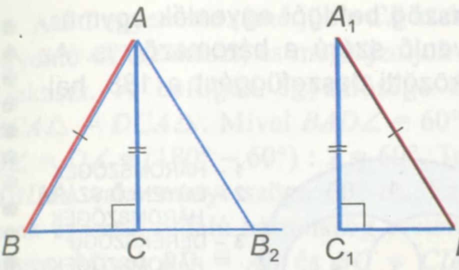
A derékszögű háromszögek egybevágóságának egy másik ismertetőjele bizonyítást igényel.

! 15. tantétel. Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és átfogója megfelelően egyenlő egy másik háromszög befogójával és átfogójával, akkor a háromszögek egybevágók.

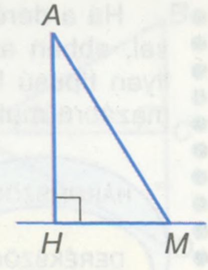
BIZONYÍTÁS

Legyen az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögekben C és C_1 derékszögek, és $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (183. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$.

Illesszük össze az $A_1B_1C_1\triangle$-et az $ABC\triangle$-gel úgy, hogy az A_1 csúcs egybeessen az A csúccsal, C_1 a C-vel. Az $A_1B_1C_1\triangle$ az $AB_2C\triangle$ helyzetet foglalja el. Mivel a C és C_1 derékszögek, a B, C és B_2 pontok egy egyenesen fekszenek. Az $ABB_2\triangle$ egyenlő szárú, $B\angle =$



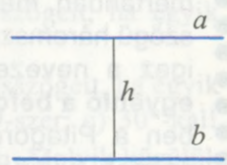
183. ábra



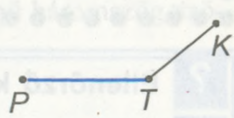
184. ábra

$= B_2\angle = B_1\angle$. Ebből következik, hogy $A\angle = A_1\angle$. Tehát az adott háromszögekben a megfelelő AB és A_1B_1, AC és A_1C_1 egyenlő oldalak között A és A_1 egyenlő szögek fekszenek. A háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók. □

Bevezetünk még a derékszögű háromszöggel kapcsolatos néhány fontos fogalmat. Ha AHM derékszögű háromszög, amelyben H a derékszög, akkor AH befogója az A pontból a HM egyenesre húzott *merőleges* (184. ábra). Az AM átfogót nevezhetjük még az A pontból a HM egyeneshez húzott *ferdének*, a HM befogót pedig e ferde HM egyenesre való *vetületének*.



185. ábra



186. ábra

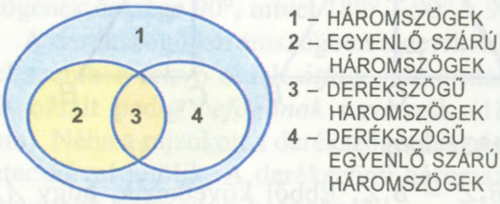
Az AH merőleges hosszát az A pontnak a HM egyenestől való *távolságának* nevezhetjük. Általában a mértani alakzatok közötti távolság a legközelebbi pontjaik közötti távolság (amennyiben ilyen pontok léteznek). Például két párhuzamos egyenes közötti távolság az egyik egyenes tetszőleges pontjából a másik egyenesre húzott merőleges hossza (185. ábra). A 186. ábrán a K pont és a PT szakasz közötti távolság KT-vel egyenlő.

Érdeklődőknek

A *derékszögű háromszögek* csak egy részét képezik az összes háromszögnek. Ha a háromszögben nincs derékszög, az ilyen háromszöget *nem derékszögű* háromszögnek nevezzük. Attól függően, hogy van-e vagy nincs derékszög a háromszögben, a háromszögeket két osztályba soroljuk. Vázlatosan ezt a felosztást a 187. halmazábra szemlélteti.

Ha a derékszögű háromszög befogói egyenlők egymással, ebben az esetben egyenlő szárú a háromszög is. Az ilyen típusú háromszögek közötti összefüggést a 188. halmazábra mutatja.

187. ábra



188. ábra

A derékszögű háromszögek fontos szerepet játszanak a mértanban, mert bármelyik háromszög felosztható két derékszögű háromszögre, és valamennyi derékszögű háromszögre igaz a nevezetes Pitagorasz tétel: **az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével.** Részletesebben a Pitagorasz tétellel, valamint a derékszögű háromszögek tulajdonságainak alkalmazásával a 8. osztályban fogtok megismerkedni.

? Ellenőrző kérdések és feladatok

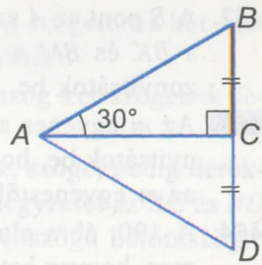
1. Mit nevezünk derékszögű háromszögnek?
2. Hogyan nevezzük a derékszögű háromszög oldalait?
3. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit!
4. Mi a merőleges, a ferde és a ferde vetülete?
5. Mit értünk a pont és az egyenes közötti távolságon?
6. Mit értünk az alakzatok közötti távolságon?

Oldjuk meg közösen!

Bizonyítsátok be, hogy **a derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szemben fekvő befogó egyenlő az átfogó felével!**

Legyen az $ABC\triangle$-ben $C\angle = 90°$ és $A\angle = 30°$ (189. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $BC = 0{,}5\ AB$!

A BC egyenesre rámérjük a CB szakasszal egyenlő CD szakaszt, és megrajzoljuk az AD szakaszt. A befogók egyenlősége folytán $BCA\triangle = DCA\triangle$. Mivel $BAD\angle = 60°$, ezért $B\angle = D\angle = (180° - 60°) : 2 = 60°$. Tehát az $ABD\triangle$ valamennyi szöge 60°-os. Ez pedig csak egyenlő oldalú háromszög esetén lehetséges. Mivel $BD = AB$ és $BC = CD$, ezért $BC = 0{,}5AB$.



189. ábra

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

442. Határozzátok meg a derékszögű háromszög szögeit, ha egyik közülük: a) 30°; b) 45°; c) 70°!

443. Számítsátok ki a derékszögű háromszög hegyesszögeit, ha egyik közülük nagyobb a másiknál: a) kétszer; b) 9-szer; c) 30°-kal!

444. A derékszögű háromszög oldalai 3 m, 4 m, 5 m. Melyik közülük az átfogó?

445. Határozzátok meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögeit!

A

446. A derékszögű háromszög egyik szöge 10°-kal nagyobb a másiknál. Számítsátok ki a szögek fokmértékét!

447. A háromszög szögeinek aránya 3, 5 és 8. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög derékszögű!

448. A háromszög egyik szöge 30°-kal nagyobb a másiknál és 30°-kal kisebb a harmadiknál. Hány fokosak a háromszög szögei?

449. Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögeinek szögfelezői 45°-ban metszik egymást!

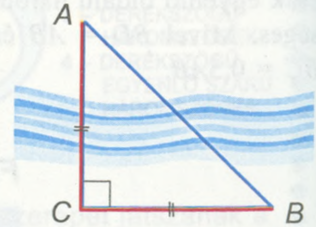
450. Határozzátok meg a derékszögű háromszög szögeit, ha a derékszögből húzott magasság a befogóval 50°-os szöget alkot!

451. A B szög felezőjén fekvő D pontból a szög száraira DA és DC merőlegeseket állítottak. Bizonyítsátok be, hogy $DA = DC$!

452. A B pont az A szög csúcsából húzott belső félegyenesen fekszik; a BK és BM a szög száraira húzott egyenlő merőlegesek. Bizonyítsátok be, hogy AB az A szög felezője!

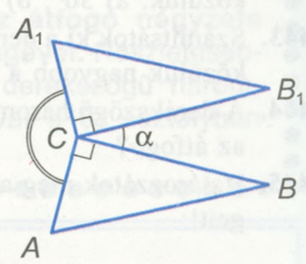
453. Az m egyenes az AB szakaszt O felezőpontjában metszi. Bizonyítsátok be, hogy az A és B pontok egyenlő távolságra vannak az m egyenestől!

454. A 190. ábra alapján magyarázzátok meg, hogyan határozható meg a folyó szélessége az egyenlő szárú derékszögű háromszög tulajdonságainak felhasználásával!



190. ábra

455. Az ABC és A_1B_1C derékszögű háromszögek a 191. ábra szerint helyezkednek el. Határozzátok meg az ACA_1 szög mértékét, ha $BCB_1\angle = \alpha$ (α – *alfa* görög betű).



191. ábra

456. **Ha az egyik háromszög befogója és szemben fekvő szöge megfelelően egyenlő egy másik háromszög befogójával és szemben fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.** Bizonyítsátok be!

457. Az $ABC\triangle$-ben $C\angle = 90°$, $A\angle = 60°$, $AB = 32$ cm. Számítsátok ki az AC-t!

B

458. Fogalmazzátok meg és bizonyítsátok be a 118–119. oldalon megoldott feladatban megfogalmazott állítás fordítottját!

459. Az $ABC\triangle$-ben $AB = 18$ cm, $B\angle = 30°$, $C\angle = 90°$. Számítsátok ki:
a) az A pont és a CB egyenes közötti távolságot;
b) az AB ferde AC egyenesre eső vetületét!

460. Az $ABC\triangle$-ben $A\angle = B\angle = 45°$, $AB = 19$ cm. Számítsátok ki:
a) a C pont és az AB egyenes közötti távolságot;
b) az AC szakasz AB egyenesre eső vetületét!

461. Két párhuzamos egyenest egy egyenes 30°-os szögben metszi. Határozzátok meg a párhuzamos egyenesek közötti távolságot, ha a metsző egyenesből a párhuzamosok 54 cm hosszú szakaszt metszenek ki!

462. Határozzátok meg a derékszögű háromszög szögeit, ha két szögének felezői 70°-os szögben metszik egymást!

463. Metszheti-e egymást a derékszögű háromszög két szögének felezője 40°-os szögben?

464. Ismeretes, hogy a négyzet oldalai egyenlők, szögei pedig derékszögek. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyzetet az AC és BD szakaszok 4 egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögre osztják!

465. Ábrázoljátok derékszögű koordináta-rendszerben az $A(0; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 3)$ és $K(1; 0)$, $P(3; 0)$, $T(3; 1)$ pontokkal megadott háromszögeket! Egybevágók-e ezek a háromszögek?

466. Melyik háromszög súlyvonala osztja azt két egybevágó háromszögre?

467. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóra bocsátott magassága CM. Határozzátok meg AB-t, ha $CM = m$!

468. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogója 20 cm, $B\angle = 30°$, CK pedig a magasság. Határozzátok meg AK-t!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

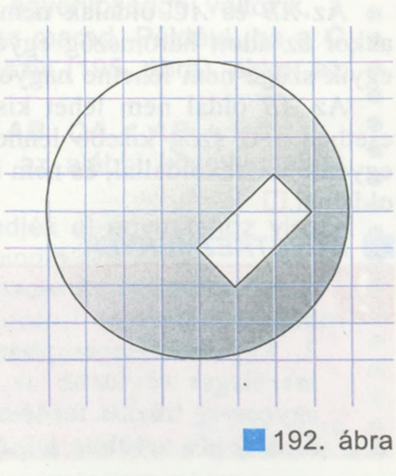
469. Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszögek valamelyik ismertetőjelét és próbáljátok bebizonyítani!

470. Az $ABC\triangle = MNK\triangle$, $A\angle = 70°$, $B\angle = 80°$. Határozzátok meg az $MNK\triangle$ szögeit!

471. Létezik-e olyan háromszög, melynek szögei 91°, 52° és 44°?

472. Az AB és CD szakaszok úgy metszik egymást az O pontban, hogy $AO = CO$, az $AOD\triangle$ szögei pedig a 2, 3 és 5 számokkal arányosak. Határozzátok meg a COB háromszög szögeit!

473. A 192. ábrát rajzoljátok le a füzetbe, és egy egyenessel osszátok két azonos területű részre a befestett részt!

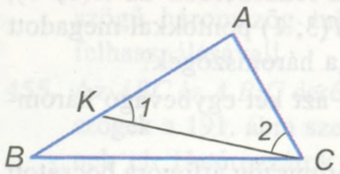


192. ábra

16. §. A háromszög egyenlőtlenségei

Már tudjátok, hogy a háromszög mindegyik oldala mindig kisebb a másik két oldal összegénél. Mielőtt tantételként bizonyítanánk ezt az állítást, megvizsgálunk egy másik tételt.

16. tantétel. Minden háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög, a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.



193. ábra

BIZONYÍTÁS.

1) Legyen az ABC háromszögben AB oldal az AC oldalnál nagyobb. Bemutatjuk, hogy a C szög nagyobb a B szögnél (193. ábra). Rámérjük az AB oldalra az AC szakasszal egyenlő AK szakaszt. Mivel ez a szakasz rövidebb, mint az AB, ezért a K pont az A és B pontok között fekszik, az $ACK\angle$ pedig az ACB szög része. Az AKC és ACK szögek egyenlők, vagyis $1\angle = 2\angle$, mert a $KAC\triangle$ egyenlő szárú. $1\angle$ nagyobb, mint $B\angle$, mivel a BKC háromszög külső szöge. Tehát a C szög nagyobb, mint a $2\angle$, a $2\angle$ viszont nagyobb, mint $B\angle$. Ezzel bebizonyítottuk, hogyha a háromszögben $AB > AC$, akkor C szög nagyobb B szögnél.

2) Legyen az $ABC\triangle$-ben C szög nagyobb, mint B szög. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben $AB > AC$.

Az AB és AC oldalak nem lehetnek egymással egyenlők, mert akkor az adott háromszög egyenlő szárú lenne, és az alapon fekvő egyik szöge nem lehetne nagyobb a másiknál.

Az AB oldal nem lehet kisebb az AC oldalnál, mert ebben az esetben a C szög kisebb lenne a B szögnél. Mivel AB oldal nem egyenlő az AC oldallal, és nem kisebb mint AC, ezért nagyobb az AC oldalnál. □

KÖVETKEZMÉNYEK

1. A derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb bármelyik befogónál.

2. Egy tetszőleges pontból egy adott egyeneshez húzott merőleges rövidebb az ugyanezen pontból ugyanarra az egyenesre húzott ferdénél.

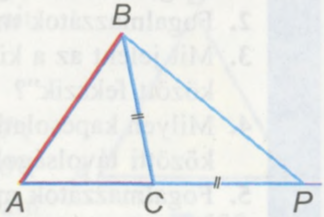
3. A ferde vetülete mindig kisebb a ferdénél.

! **17. tantétel. A háromszög bármelyik oldala kisebb a másik két oldal összegénél.**

BIZONYÍTÁS

Megvizsgálunk egy tetszőleges $ABC\triangle$-et és bebizonyítjuk, hogy $AB < BC + CA$ (194. ábra).

Bizonyítás céljából az AC oldal meghosszabbítására ráмérjük a BC oldallal egyenlő CP szakaszt, és megvizsgáljuk az ABP háromszöget. A CPB és CBP szögek egyenlők, mert $CB = CP$. Az ABP szög nagyobb a $P\angle$-nél. Mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, ezért $AB < AP$. Figyelembe véve, hogy $AP = AC + CP = AC + CB$ kapjuk, hogy $AB < AC + CB$.



194. ábra

Hasonló módon bebizonyíthatjuk, hogy $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$. □

A bebizonyított tantételből következik az alábbi állítás.

Ha az A, B, C pontok nem egy egyenesen fekszenek, akkor igazak az egyenlőtlenségek:

$$AB < BC + CA,\ BC < CA + AB,\ AC < CB + BA.$$

A három egyenlőtlenség mindegyikét a *háromszög egyenlőtlenségének* nevezzük.

ÉRDEKLŐDŐKNEK

Ha az A, B és C pontok egy egyenesen fekszenek, akkor a fenti egyenlőtlenségek egyike egyenlőséggé változik, a másik kettő pedig továbbra is igaz marad. Például, ha a C pont az A és B pontok között fekszik (195. ábra), akkor az alábbi összefüggések igazak:

$$AB = BC + CA,\ BC < CA + AB,\ CA < AB + BC.$$

Figyelembe véve a fentieket, az alábbi következtetést vonhatjuk le.

Bármilyen módon is helyezkedjék el egymáshoz viszonyítva három A, B, és C pont, mindig

$$AB \leqslant BC + CA,\ BC \leqslant CA + AB,\ CA \leqslant AB + BC.$$

Tetszőleges három pont közötti távolságok közül egyik sem nagyobb a másik kettő összegénél.

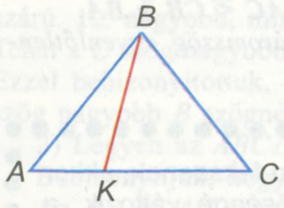
195. ábra

? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Igaz-e, hogy a háromszögben kisebb oldallal szemben kisebb szög, kisebb szöggel szemben kisebb oldal fekszik?
2. Fogalmazzátok meg az XYZ háromszög egyenlőtlenségeit!
3. Mit jelent az a kifejezés, hogy „a B pont az A és C pontok között fekszik”?
4. Milyen kapcsolatban vannak egymással az A, B és C pontok közötti távolságok, ha a B pont az A és C között fekszik?
5. Fogalmazzátok meg a tetszőleges A, B és C pontok közötti távolságok tulajdonságait!

• *Oldjuk meg közösen!*

1. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög csúcsát az alap tetszőleges pontjával összekötő szakasz rövidebb a háromszög száránál!

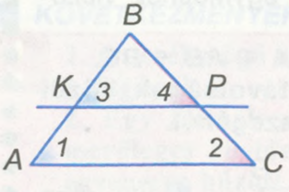


196. ábra

Legyen AC egy tetszőleges egyenlő szárú ABC háromszög alapja, K az alapon fekvő tetszőleges pont (196. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $BK < AB$.

Az AKB szög a $BKC\triangle$ külső szöge, $AKB\angle > C\angle$. Mivel $C\angle = A\angle$, ezért $AKB\angle > A\angle$. Az $ABK\triangle$ BK oldala kisebb szöggel szemben fekszik, mint az AB oldal. Tehát $BK < AB$.

2. Az ABC háromszöget metsző KP egyenes párhuzamos az AC alappal (197. ábra). Az adott háromszög AB vagy BC oldala nagyobb, ha $BK < BP$?



197. ábra

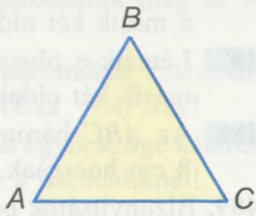
Megszámozunk bizonyos szögeket a 197. ábra szerint. A párhuzamosokat metsző egyenes által alkotott megfelelő szögek egyenlők, $1\angle = 3\angle$ és $2\angle = 4\angle$. Mivel a $BKP\triangle$-ben $BK < BP$, ezért $4\angle < 3\angle$, tehát $2\angle < 1\angle$.

Következésképpen $AB < BC$.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

474. A 198. ábra alapján hasonlítsátok össze az ABC háromszög AB és BC oldalait, ha:
1) $A\angle < C\angle$; 4) $A\angle \leqslant C\angle$;
2) $A\angle > C\angle$; 5) $A\angle = 60°$, $B\angle = 70°$;
3) $A\angle = C\angle$; 6) $B\angle = 80°$, $C\angle = 40°$!



198. ábra

475. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög mindegyik oldalát – például 1 m-rel növeljük, a keletkezett háromszög ugyancsak egyenlő szárú lesz!
476. Növelhetjük-e a háromszög mindegyik szögét mondjuk 10°-kal?

A

477. Az $ABC\triangle$ melyik oldala legnagyobb, illetve legkisebb, ha:
1) $A\angle = 45°$, $B\angle = 60°$;
2) $A\angle = 50°$, $B\angle = 100°$;
3) $B\angle = 75°$, $C\angle = 90°$?
478. Az $ABC\triangle$ melyik szöge legnagyobb, illetve legkisebb, ha:
1) $AB = 3$ m, $BC = 4$ m, $AC = 5$ m;
2) $AB - BC = 2$ m, $BC - AC = 1$ m?
479. Lehet-e az egyenlő szárú háromszög alapja kétszer nagyobb a száránál? És kétszer kisebb?
480. Lehet-e a háromszög mindegyik szöge 60°-nál kisebb?
481. Létezik-e olyan háromszög, melynek mindegyik szöge nagyobb 60°-nál?
482. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög magassága nem hosszabb az ugyanazon csúcsból húzott súlyvonalnál!

B

483. Lehet-e egyenlő a háromszög egyik oldala kerületének felével?
484. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög bármelyik oldala kisebb a félkerületnél!

485. Egyenlő lehet-e a háromszög két oldalának összege félkerületével?

486. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög bármelyik oldala nagyobb a másik két oldal különbségének felénél!

487. Létezik-e olyan háromszög, melynek egyik oldala egyenlő a másik két oldal különbségével?

488. Az ABC háromszög AB és AC oldalai megfelelően 5 cm és 8 cm hosszúak. Milyen hosszú lehet a BC oldal?

489. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög bármelyik oldala rövidebb a másik három oldal összegénél!

490. Egy háromszög két oldala 98 cm és 28 cm. Milyen hosszú lehet a harmadik oldal?

491. A háromszög két egyenlő oldalának összege a kerület 0,6 része. Igaz-e, hogy a két egyenlő oldal közötti szög nagyobb 60°-nál?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

492. Határozzátok meg két mellékszög mértékét, ha fokmértékeik különbsége 30°!

493. Két egyenes egymással való metszésekor keletkezett két szög összege 200°. Határozzátok meg a másik két szög mértékét!

494. Az AC alapú ABC egyenlő szárú háromszög A és C szögeinek felezői az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az AOC háromszög ugyancsak egyenlő szárú!

495. Bizonyítsátok be, hogy amennyiben a háromszög külső szögének felezője párhuzamos a háromszög oldalával, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú!

496. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjával párhuzamos egyenes által kimetszett háromszög szintén egyenlő szárú!

4. számú önálló munka

1. változat

1°. Mit nevezünk egyenlő szárú háromszögnek?

2°. Az $ABC\triangle$ derékszögű ($C\angle = 90°$). Határozzátok meg az A szöget, ha $B\angle = 70°$!

3•. A K és P pontok az ABC egyenlő szárú háromszög szárainak felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy $AKC\triangle = APB\triangle$!

4•. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha egyik szöge kétszer nagyobb a másodiknál és 40°-kal kisebb a harmadiknál!

2. változat

1°. Mit nevezünk derékszögű háromszögnek?

2°. Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú ($AB = BC$). Határozzátok meg az A szöget, ha $B\angle = 70°$!

3•. A K és P pontok az ABC egyenlő szárú háromszög szárainak felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy $KBC\triangle = PCB\triangle$!

4•. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha egyik szöge kétszer kisebb a másodiknál és 12°-kal nagyobb a harmadiknál!

3. változat

1°. Milyen tulajdonságait ismeritek az egyenlő szárú háromszögnek?

2°. Az $ABC\triangle$ derékszögű ($C\angle = 90°$) és egyenlő szárú. Határozzátok meg a $B\angle$ fokmértékét!

3•. A K és M pontok az ABC egyenlő szárú háromszög AC alapján fekvő pontok. $BKA\angle = BMC\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $BK = BM$!

4•. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha egyik szöge háromszor nagyobb a másodiknál és 40°-kal kisebb a harmadiknál!

4. változat

1°. Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának egyik ismertetőjelét!

2°. Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú ($AB = BC$). Határozzátok meg a B szög fokmértékét, ha $C\angle = 50°$!

3•. A K és M pontok az ABC egyenlő szárú háromszög AC alapján fekszenek. $BKA\angle = BMC\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $AK = CM$!

4•. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha egyik szöge háromszor kisebb a másodiknál és 5°-kal nagyobb a harmadiknál!

Raizos feladatok

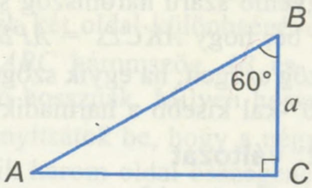
A | B

1

A

$\underline{BC = a}$

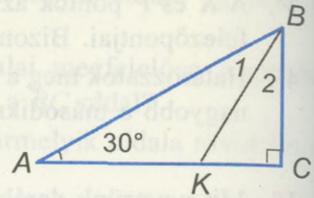
AB



B

$\underline{1\angle = 2\angle,\ BK = 10}$

$AK,\ KC$

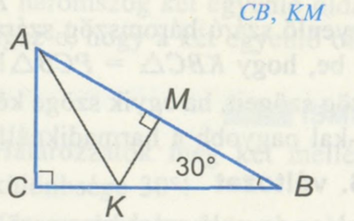


2

A

$\underline{AK = KB = 8}$

$CB,\ KM$

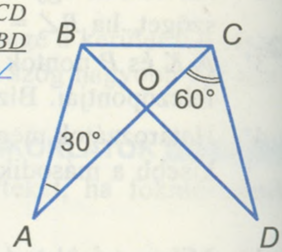


B

$AB = CD$

$\underline{AC = BD}$

$AOD\angle$



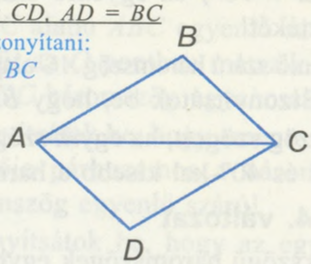
3

A

$\underline{AB = CD,\ AD = BC}$

Bebizonyítani:

$AD \parallel BC$

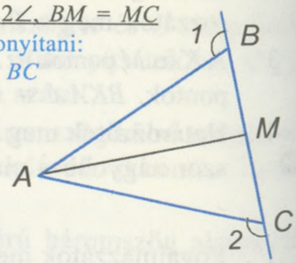


B

$\underline{1\angle = 2\angle,\ BM = MC}$

Bebizonyítani:

$AM \perp BC$

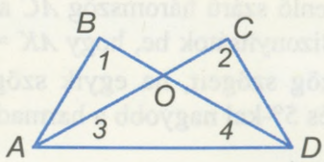


4

A

$\underline{1\angle = 2\angle,\ 3\angle = 4\angle}$

Bebizonyítani: $ABO\triangle = DCO\triangle$

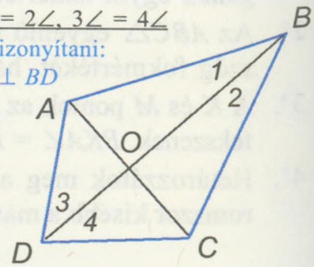


B

$\underline{1\angle = 2\angle,\ 3\angle = 4\angle}$

Bebizonyítani:

$AC \perp BD$



4. számú teszt feladatsor

1.	Az egyenlő szárú háromszög szárai 5 cm hosszúak, alapja 6 cm. Kerülete:	a) 17 cm; b) 16 cm; c) 11 cm; d) 30 cm.
2.	Az egyenlő szárú háromszög egyik szöge 100°. Másik két szöge:	a) 100° és 60°; b) 80° és 80°; c) 40° és 40°; d) 100° és 160°.
3.	Az *ABC* egyenlő szárú háromszög (*AB* = *BC*) szárszöge *B*∠ = 80°. A *B* csúcsból húzott súlyvonal és a szár közötti szög:	a) 50°; b) 40°; c) 60°; d) 25°.
4.	Az egyenlő szárú derékszögű háromszög alapján fekvő szög:	a) 45°; b) 60°; c) 30°; d) 90°.
5.	A derékszögű háromszög átfogója 20 cm, egyik szöge pedig 30°. A kisebbik befogó:	a) 20 cm; b) 5 cm; c) 10 cm; d) 15 cm.
6.	A háromszög szögeinek aránya 4, 5, 9. A háromszög:	a) hegyesszögű; b) derékszögű; c) tompaszögű; d) egyenlő szárú.
7.	Az *ABCD* téglalapot az *AC* átló két háromszögre osztja. A hibás állítás:	a) *ABC*△ = *CDA*△; b) *BAC*∠ = *ACD*∠; c) *ACB*∠ = *ACD*∠; d) *ABC*∠ = *ADC*∠.
8.	A derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, a rajta fekvő szög 60°. Az átfogó:	a) 10 cm; b) 5 cm; c) 2,5 cm; d) 20 cm.
9.	Az *ABC*△-ben *A*∠ = 50°, *B*∠ = 70°. Az *AB* ∗ *BC* felírásban a ∗ helyébe kerülő jel:	a) <; b) =; c) ⩽; d) >.
10.	A derékszögű háromszög egyik szöge 60°, legkisebb és legnagyobb oldalának összege 6 cm. Az átfogó:	a) 7 cm; b) 2 cm; c) 4 cm; d) 1 cm.

Ellenőrző dolgozat típusfeladatai

1°. Az egyenlő szárú háromszög kerülete 112 cm, alapja 34 cm. Számítsátok ki a szárak hosszát!

2°. Határozzátok meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögeit!

3°. Számítsátok ki az egyenlő szárú háromszög alapját, ha szára 17 cm, kerülete pedig 54 cm!

4°. Az ABC és KPH háromszögek egyenlő oldalúak, $AB = KP$. Határozzátok meg KH-t, ha $BC = 5$ cm!

5•. Számítsátok ki az egyenlő szárú háromszög szögeinek fokmértékét, ha szárszöge háromszor nagyobb az alapon fekvő szögeknél!

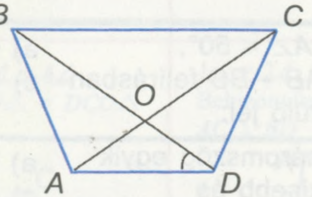
6•. Az egyenlő szárú háromszög kerülete 73 cm. Számítsátok ki az oldalakat, ha a szára 7 cm-rel rövidebb az alapnál!

7•. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszög súlyvonalai egyenlők egymással!

8•. Bizonyítsátok be, hogy két derékszögű háromszög egybevágó, ha az egyik háromszög befogói megfelelően egyenlők a másik háromszög befogóival!

9••. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek súlyvonalai BM és B_1M_1. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$!

10••. A 199. ábra alapján számítsátok ki a COD szög fokmértékét, ha $AB = CD$, $BD = AC$ és $BDA\angle = 35°$!



199. ábra

1. Milyen háromszöget nevezünk egyenlő szárúnak?
2. Hogyan nevezzük az egyenlő szárú háromszög oldalait?
3. Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszög tulajdonságait!
4. Milyen háromszöget nevezünk egyenlő oldalúnak?
5. Milyen összefüggés van a *háromszögek* és az *egyenlő szárú háromszögek* között?
6. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjelét!
7. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának első és második ismertetőjelét!
8. Hogyan értelmezitek a kifejezést: *a háromszög meghatározható három oldalával?*
9. Milyen elemeivel határozható meg a háromszög?
10. Mit értünk a kifejezésen: *a háromszög merev alakzat?*
11. Mit nevezünk derékszögű háromszögnek?
12. Hogy nevezzük a derékszögű háromszög oldalait?
13. Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjeleit!
14. Mi a merőleges, a ferde és a ferde vetülete?
15. Mit értünk a pont és az egyenes közötti távolságon?
16. Mi az alakzatok közötti távolság?
17. Igaz-e, hogy a háromszögben a kisebb oldallal szemben kisebb szög, a kisebb szöggel szemben kisebb oldal fekszik?
18. Fogalmazzátok meg az *XYZ* háromszög egyenlőtlenségeit!
19. Mit jelent a kifejezés: *a B pont az A és C pontok között fekszik?*
20. Milyen kapcsolatban vannak az *A*, *B* és *C* pontok közötti távolságok, ha a *B* pont az *A* és *C* pontok között fekszik?
21. Fogalmazzátok meg az *A*, *B* és *C* tetszőleges pontok közötti távolságok tulajdonságait!

A 3. fejezet összefoglalása

A *háromszög* három elemből álló zárt töröttvonal; vagy a síknak ilyen töröttvonallal határolt része. Minden háromszögnek három oldala, három csúcsa és három szöge van. A háromszög oldalai hosszának összege – a háromszög *kerülete*.

A háromszög szögeinek összege 180°.

A mértanban fontos szerepet játszik a háromszögek egybevágósága. Két alakzatot akkor mondunk egybevágónak, ha egymásra helyezve pontosan illeszkednek. Ha az $ABC\triangle = KPT\triangle$, akkor $AB = KP$, $BC = PT$, $CA = TK$, $A\angle = K\angle$, $B\angle = P\angle$, $C\angle = T\angle$.

A háromszögek egybevágóságának három ismertetőjele

- **Két háromszög egybevágó, ha: az egyik háromszög két oldala és a közöttük fekvő szög egyenlő a másik háromszög két oldalával és a közöttük fekvő szöggel (I.); az egyik háromszög egy oldala és a rajta fekvő két szög egyenlő a másik háromszög egy oldalával és a rajta fekvő két szöggel (II.); az egyik háromszög három oldala egyenlő a másik háromszög három oldalával (III.).**

A háromszög *egyenlő szárú*, ha két egyenlő oldala van. Az egyenlő szárú háromszög egyenlő oldalait *száraknak*, a harmadik oldalt *alapnak* nevezzük.

Az egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők.

Ha a háromszög két szöge egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha a háromszög oldalai egyenlők egymással, akkor a háromszög *egyenlő oldalú*. Az egyenlő oldalú háromszög mindegyik szöge 60°.

Szögeik alapján a háromszögeket felosztjuk *hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű* háromszögekre. A derékszögű háromszög derékszöggel szemben fekvő oldalát *átfogónak*, a másik kettőt *befogóknak* nevezzük.

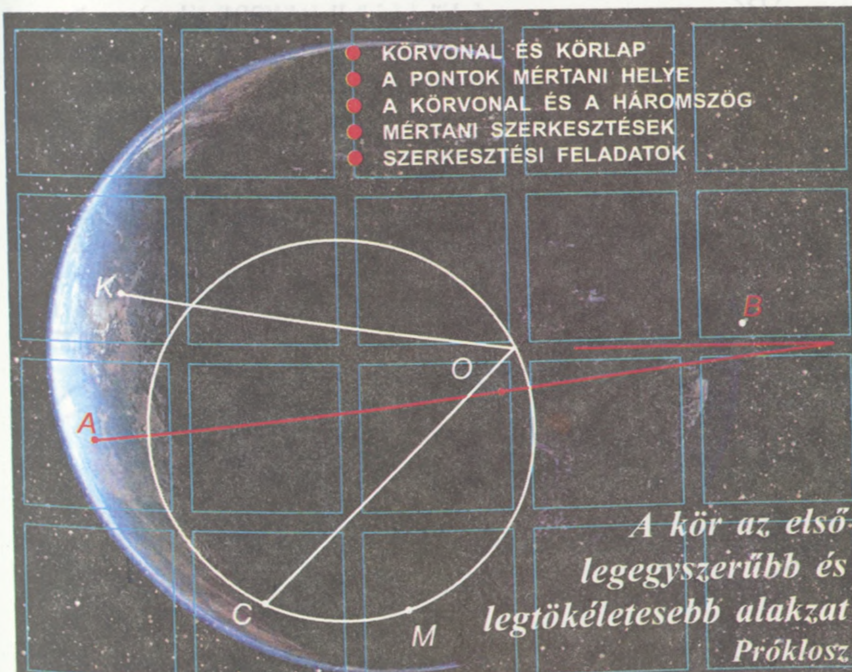
A háromszög bármelyik oldala kisebb a másik két oldal összegénél és nagyobb különbségüknél. A síkon fekvő három tetszőleges A, B és C pont esetén $AB + BC \geqslant AC$.

Mindegyik háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.

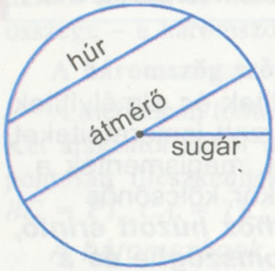
fejezet 4.

A KÖRVONAL ÉS A KÖRLAP. MÉRTANI SZERKESZTÉSEK

Ebben a részben kibővítitek és elmélyítitek az előző osztályban szerzett ismereteiteket a körvonalról és a körről, megismeritek a kör és az egyenes, két kör kölcsönös helyzetét a síkon, ***a körhöz húzott érintő, érintkező körök, a háromszögbe és a háromszög köré írt kör tulajdonságaival.*** Megismeritek mi a ***pontok mértani helye***, megtanuljátok elvégezni az alapvető mértani szerkesztéseket, és bonyolultabb szerkesztési feladatokat megoldani vonalzó és körző segítségével.



17. §. A körvonal és a körlap

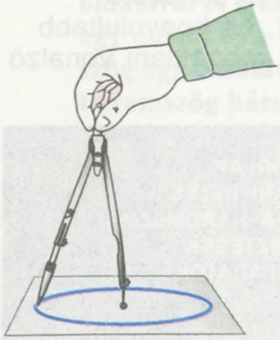


200. ábra

A *körvonal* olyan síkbeli pontok összessége (mértani helye), amelyek egyenlő távolságra vannak egy megadott ponttól. Ezt a pontot a *körvonal középpontjának* nevezzük.

A középpontot a körvonal tetszőleges pontjával összekötő szakaszt *sugárnak* nevezzük. A körvonal két tetszőleges pontját összekötő szakasz a *húr*. A középponton átmenő húrt *átmérőnek* nevezzük (200. ábra).

Az átmérőt két sugár alkotja, ezért kétszer hosszabb a sugárnál. Ha a húr nem halad át a kör középpontján, akkor hossza kisebb az átmérőnél. (Miért?)

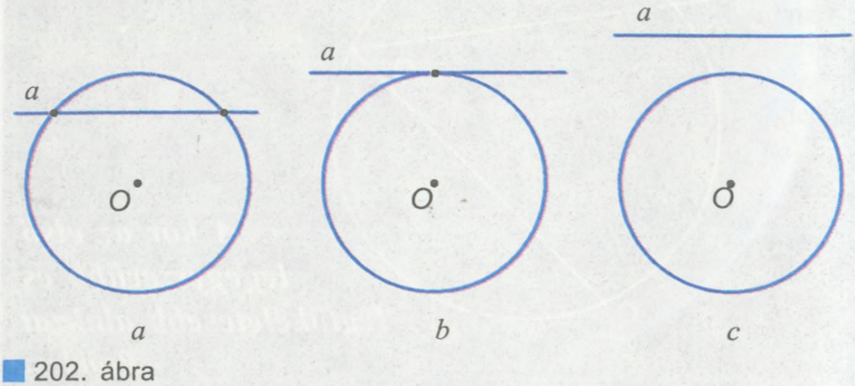


201. ábra

Körvonalat körző segítségévek rajzolunk. A sík egy adott pontjából csak egy adott sugarú kör rajzolható (201. ábra).

A kört egy egyenes elkerülheti, érintheti vagy metszheti. Ezért a körvonalnak az egyenessel lehet két közös pontja (202. *a* ábra), egy közös pontja (202. *b* ábra), vagy nincs közös pontjuk (202. *c* ábra).

A körvonal két pontján átmenő egyenest *szelőnek* nevezzük.



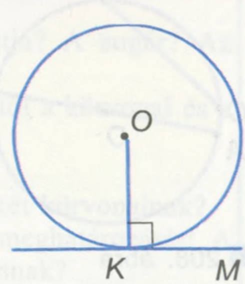
202. ábra

Az *érintő* olyan egyenes a síkon, amelynek egy adott körvonallal egy, és csak egy közös pontja van. A közös pont az *érintési pont.* (Egy síkban levő alakzatokról van szó.)

Az érintési pont a körvonalon fekszik, ezért az érintő a kör középpontjától a sugárral egyenlő távolságra van. Az érintő többi pontja a körvonalon kívül fekszik, távolságuk a kör középpontjától nagyobb a sugár hosszánál. Ebből következik, hogy

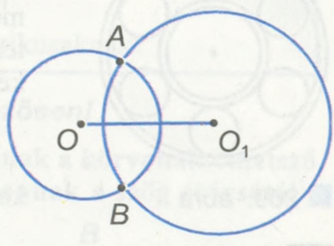
! a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

A körvonalon adott K ponton keresztül úgy rajzolunk érintőt a körhöz, hogy meghúzzuk az OK sugarat, majd az erre merőleges KM egyenest (203. ábra).



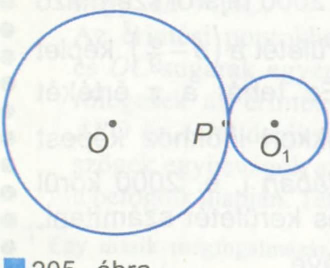
203. ábra

Ha két különböző körnek két közös pontja van, azt mondjuk, hogy a körök ebben a két pontban *metszik* egymást. Két kör metszéspontjai a körök középpontján átmenő egyenes két különböző oldalán helyezkednek el. A 204. ábra O és O_1 középpontú köröket ábrázol, melyek az A és B pontokban metszik egymást.

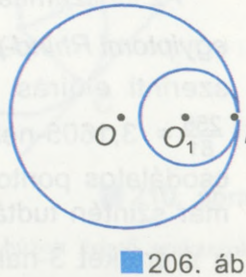


204. ábra

Ha két körnek csak egy közös pontja van, azt mondjuk, hogy a két kör *érinti* egymást ebben a pontban. Két kör érintkezése lehet külső (205. ábra), illetve belső (206. ábra). Mindkét esetben az érintési pont és a körök középpontjai egy egyenesen fekszenek.



205. ábra



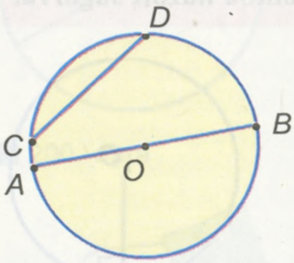
206. ábra

Egy síkban fekvő közös középpontú köröket *koncentrikus köröknek* nevezünk (207. ábra).

207. ábra

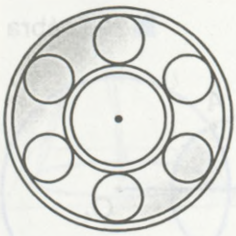
Körök rajzolására általában körzőt használunk. Esetenként azonban célszerűbb különböző sugarú kivágott köröket tartalmazó sablonokat használni.

A körvonal a síkot két részre (tartományra) osztja. A körvonal és belső tartományának egyesítése a *körlap*. A körlapot a körvonal határolja. A körlap *középpontja*, *sugara*, *átmérője*, *húrja* megegyezik a körlap határát képező körvonal középpontjával, sugarával, átmérőjével, húrjával (208. ábra).



208. ábra

A körvonal példája lehet az abroncs, a gyűrű, a körlapé a vödör alja, a látható napkorong stb. A vonatkerék a sínen jól modellezi az egyenessel érintkező kört. A csapágy vázlatos rajzán (209. ábra) néhány egymással érintkező kör látható.



209. ábra

Amint már korábbi tanulmányaitokból ismeritek, a körvonal hossza C és a körlap területe S a sugár r segítségével az alábbi képletekkel fejezhető ki:

$$C = 2\pi r; \quad S = \pi r^2.$$

E képletek bizonyításával később foglalkozunk.

Érdeklődőknek

Az időszámításunk kezdete előtti 2000 tájáról származó *egyiptomi Rhind-papiruszon* a kör területét a $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ képlet szerinti előírás határozza meg. Ez tehát a π értékét $\frac{256}{81} = 3{,}1605$-nek veszi, ami az akkori időkhöz képest csodálatos pontosság. *Mezopotámiában* i. e. 2000 körül már szintén tudták a kör területét és kerületét számítani, a π értékét 3-nak, olykor $3\frac{1}{8}$-nak véve.

Régen a *körlapot* is *körnek* nevezték. A telihold, a malomkerék körlap és nem kör alakú. Nem ritkán a kört keréknek hívják. Egyesek úgy vélik, az első kereket vidékünk mesteremberei készítették.

A mértanban a kör fontos szerepet játszik, külön rész, *a kör geometriája* foglalkozik a körrel kapcsolatos alakzatok tulajdonságaival.

? Ellenőrző kérdések és feladatok

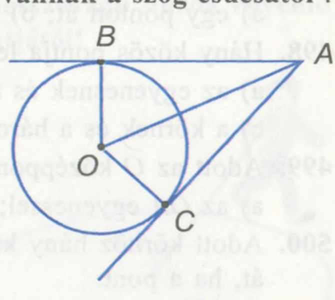
1. Mi a körvonal? A körvonal középpontja? A sugár? Az átmérő? A húr?
2. Mi a körlap? Miben különbözik egymástól a körvonal és a körlap?
3. Hány közös pontja lehet:
   a) az egyenesnek és a körvonalnak; b) két körvonalnak?
4. Fogalmazzátok meg a kör érintőjének meghatározását! A kör érintőjének milyen tulajdonságai vannak?
5. Milyen köröket mondunk érintő köröknek? Mi az érintési pont?
6. Hogyan érintheti egymást két kör?
7. Milyen köröket nevezünk koncentrikusaknak?

• Oldjuk meg közösen!

1. Bizonyítsátok be, **hogy a szög szárainak a körvonalat metsző érintőpontjai egyenlő távolságra vannak a szög csúcsától**[1]!

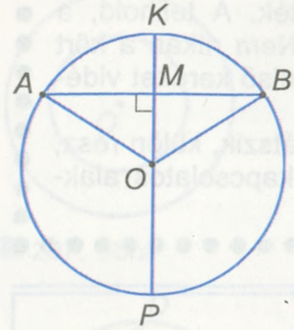
Az O középpontú kör érintési pontjai az A szög száraival B és C (210. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $AB = AC$.

Az érintési pontokba húzott OB és OC sugarak egyenlők, és merőlegesek az érintőkre. Ezért az ABO és ACO derékszögű háromszögek egybevágók az átfogóik és a befogóik alapján. Tehát $AB = AC$.



210. ábra

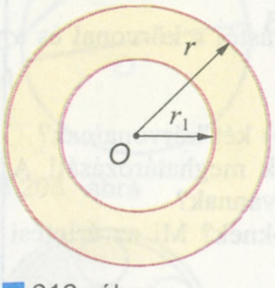
[1] Egy másik megfogalmazás szerint: Külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő.



211. ábra

2. Bizonyítsátok be, **hogy az átmérőtől különböző húr középpontján áthaladó átmérő merőleges a húrra!**

Legyen AB a kör húrja, KP pedig az AB húr M középpontján átmenő átmérő (211. ábra). Az OAB háromszög egyenlő szárú, mert $OA = OB$. Az egyenlő szárú háromszög alapjához húzott OM súlyvonal egyben a háromszög magassága is. Ezért $OM \perp AB$, tehát $KP \perp AB$.



212. ábra

3. Határozzátok meg az r és r_1 sugarú koncentrikus körök által határolt gyűrű területét (212. ábra)!

A gyűrű S területe az r és r_1 sugarú körlapok területének különbsége:

$$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi(r^2 - r_1^2).$$

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

497. Hány körvonal rajzolható:
a) egy ponton át; b) két ponton át; c) három ponton át?

498. Hány közös pontja lehet:
a) az egyenesnek és a körnek; b) két körnek;
c) a körnek és a háromszögnek; d) a körnek és a síknak?

499. Adott az O középpontú kör. Hány közös pontja van a körnek:
a) az OA egyenessel; b) az OM félegyenessel?

500. Adott körhöz hány különböző érintő húzható egy adott ponton át, ha a pont:
a) a körön fekszik; b) a körön kívül van; c) a körön belül van?

501. Hány pár érintő kör látható a 209. ábrán? És hány pár koncentrikus kör?

A

502. Rajzoljatok egy körvonalat, húzzátok meg benne a sugarat, átmérőt és húrt!

503. Bizonyítsátok be, hogy az átmérő a kör legnagyobb húrja!

504. Adott egy kör, és az átmérőjétől kisebb szakasz. Rajzoljatok egy olyan húrt, melynek hossza azonos az adott szakasz hosszával!

505. Határozzátok meg az 5 m és 7 m sugarú érintő körök középpontjai közötti távolságot, ha:
a) belülről érintkeznek; b) kívülről érintkeznek!

506. Vannak-e közös pontjai a 3 cm és 4 cm sugarú köröknek, ha középpontjaik között a távolság 5 cm?

507. AB és CD az O középpontú kör két egyenlő húrja. Bizonyítsátok be, hogy $ABO\triangle = CDO\triangle$!

508. Az O és O_1 középpontú körvonalak az A és B pontokban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy:
1) $OAO_1\triangle = OBO_1\triangle$; 2) $OAB\triangle$ és $O_1AB\triangle$ egyenlő szárú!

509. Az O és O_1 középpontú körvonalak az A és B pontokban metszik egymást, és mindegyik kör átmegy a másik középpontján. Határozzátok meg az AOB és a OAO_1 szögeket!

B

510. Három kör mindegyike átmegy a másik kettő középpontján. Bizonyítsátok be, hogy középpontjaik egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai!

511. Bizonyítsátok be, hogy **az azonos hosszúságú húrok egyenlő távolságra vannak a kör középpontjától!**

512*. Hogyan szerkeszthető érintő az adott körvonalhoz, mely:
a) adott egyenessel párhuzamos;
b) adott egyenesre merőleges?

513. A kertész kört rajzol virágágy készítéséhez karók és zsinór segítségével (213. ábra). Miért kör az így rajzolt alakzat? Kör keletkezik-e, ha a zsinór rátekeredik a karóra?

213. ábra

514. Határozzátok meg két egymást érintő kör sugarát, ha azok úgy aránylanak, mint 1 : 3 és a távolság a két kör középpontja között 16 cm! Két esetet vizsgáljatok meg!

515. Egy külső A pontból az O középpontú körhöz AB és AC érintőket húztak. Bizonyítsátok be, hogy AO a BAC szög felezője!

516. Egy külső A pontból az O középpontú körhöz két érintőt húztak, melyek 60°-os szöget zárnak be egymással. Számítsátok ki a kör sugarát, ha OA = 10 cm!

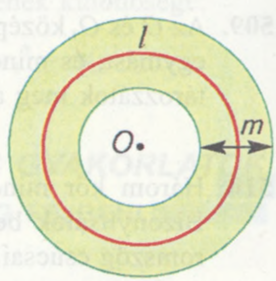
517. Egy külső A pontból az O középpontú körhöz két érintőt húztak. Számítsátok ki a közöttük levő szöget, ha az A pont és az érintési pont közötti távolság egyenlő a kör sugarával!

518. A kör az A szög szárait B és C pontokban úgy érinti, hogy $AB = BC$. Határozzátok meg az A szög mértékét!

519. Három, O_1, O_2 és O_3 középpontú egybevágó kör páronként érinti egymást a K, P és T pontokban. Bizonyítsátok be, hogy:
1) $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$; 2) $KP = PT = TK$!

520. A kör középpontjából három félegyenest húztak, melyek három ívre osztották a körvonalat. Mindegyik ív hossza 3 cm. Határozzátok meg a félegyenesek közötti szögeket és a kör sugarát!

521. Bizonyítsátok be, hogy az r és r_1 sugarú koncentrikus körök által határolt gyűrű területe a két kör kerülete számtani középarányosának és a két sugár különbségének szorzatával egyenlő (214. ábra)!



214. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

522. Az a hosszúságú szakasz 3 egyenlő részre van osztva. Az a mekkora részét képezi az első rész közepe és a harmadik rész közepe közötti távolság?

523. Határozzátok meg a 40 cm kerületű háromszög szögfelezőjét, ha az az eredeti háromszöget két olyan háromszögre osztja, amelyek kerületei 20 cm és 30 cm hosszúak!

524. Számítsátok ki a 36 cm kerületű háromszög oldalainak számtani középarányosát!

525*. Határozzátok meg az $ABCD$ négyzet területét, ha AC = 10 cm!

18. §. A pontok mértani helye

Bonyolultabb szerkesztési feladatok megoldásához tudni kell, mit értünk a pontok mértani helyén.

Pontok mértani helyének nevezzük azt az alakzatot, amely közös tulajdonságú pontokból tevődik össze.

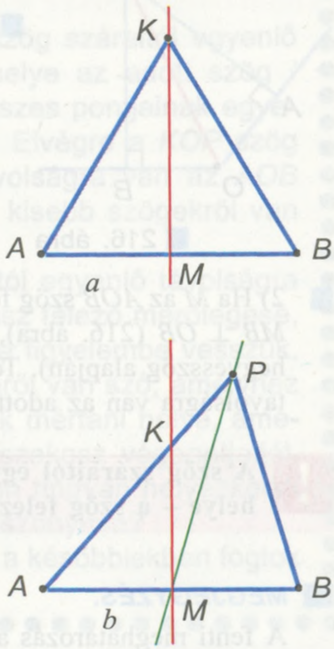
Megvizsgálunk néhány példát a pontok mértani helyére a síkban.

A körvonal egy adott ponttól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye[1].

Az r sugarú körlap olyan pontok mértani helye, melyek távolsága egy adott ponttól nem nagyobb r-nél.

1. FELADAT. Határozzátok meg egy adott szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

MEGOLDÁS. Legyen adva az AB szakasz. A szakasz M közepe egyenlő távolságra van az A és B pontoktól (215. *a* ábra). Meghúzzuk az AB-re merőleges MK egyenest. Ennek valamennyi M ponttól különböző K pontja ugyancsak egyenlő távolságra van az A és B pontoktól, mivel $KAM\triangle = KBM\triangle$, tehát $KA = KB$.



215. ábra

Ha a P pont nem fekszik az MK egyenesen, nem lehet egyenlő távolságra az A és B pontoktól (215. *b* ábra). Valóban, a feltételezésből, hogy $PA = PB$ következik a PM és AB merőlegessége, mivel a PAB egyenlő szárú háromszög PM súlyvonala egyben magasság is. Akkor a PMB és KMA két derékszögű háromszög összege nem lenne egyenlő 180°-kal, ami lehetetlen. Tehát az MK egyenesen kívül nem léteznek az A és B pontoktól egyenlő távolságra fekvő pontok.

Ily módon az MK egyenes minden pontja egyenlő távolságra van az A és B pontoktól, és az a pont, amely nem fekszik az MK egyenesen, nem lehet egyenlő távolságra az A és B pontoktól.

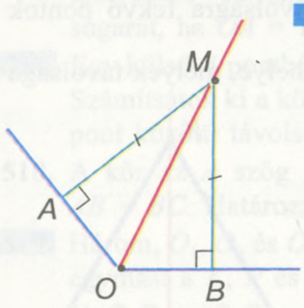
[1] Manapság inkább a „*pontok mértani helye*" kifejezést a *pontok halmaza* kifejezéssel helyettesítik.

A szakasz közepén merőlegesen átmenő egyenest a szakasz *felező merőlegesének* nevezzük. Az előző meggondolásokból következik, hogy

! a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a szakasz felező merőlegese.

2. FELADAT. Határozzátok meg a szög szárai között lévő, a száraktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

1) Legyen az M pont egyenlő távolságra a szög OA és OB száraitól (216. ábra). Az M pontból a szög száraira bocsátott MA és MB merőlegesek egyenlők egymással. Ezért az $MOA\triangle = MOB\triangle$ a befogó és az átfogó alapján. Tehát $AOM\angle = BOM\angle$, vagyis az M pont az AOB szög felezőjéhez tartozik.



216. ábra

2) Ha M az AOB szög felezőjének tetszőleges pontja és $MA \perp OA$, $MB \perp OB$ (216. ábra), akkor $OAM\triangle = OBM\triangle$ (a átfogó és a hegyesszög alapján). Tehát $MA = MB$, vagyis az M pont egyenlő távolságra van az adott szög száraitól.

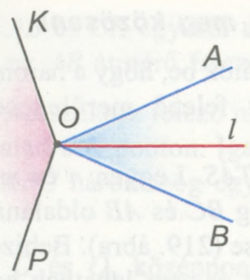
! A szög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye – a szög felezője.

MEGJEGYZÉS.

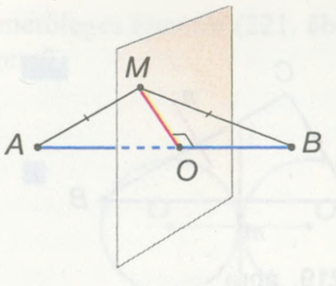
A fenti meghatározás az egyenesszögnél kisebb szögek esetében igaz.

Érdeklődőknek

Helyes-e azt mondani, hogy a szög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a szög felezője? Nem. Amikor a síkmértanban a pontok mértani helyéről beszélve nem pontosítjuk, milyen pontokról is van szó, akkor a sík azon pontjait értjük, melyek az alakzatot



217. ábra



218. ábra

alkotják. Ilyen feltételek mellett a szög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye az adott szög *l* szögfelezője és egy másik szög összes pontjainak egyesítése, amint a 217. ábrán látható. Elvégre a *KOP* szög minden pontja szintén egyenlő távolságra van az *AOB* szög száraitól. Az egyenesszögnél kisebb szögekről van szó.

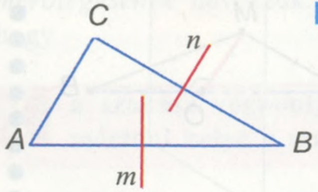
Azt, hogy a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a szakasz felező merőlegese, abban az esetben jelenthetjük ki, ha figyelembe vesszük, hogy a sík pontjainak mértani helyéről van szó, amelyhez a **szakasz** tartozik. A **tér** pontjainak mértani helye, amelyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól, lehet valamely sík (218. ábra). Vajon hogyan helyezkedik el ez a sík az adott szakaszhoz viszonyítva?

A tér pontjainak mértani helyéről a későbbiekben fogtok tanulni.

? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mi a pontok mértani helye? Mondjatok példákat!
2. Mi a szakasz felező merőlegese?
3. Mi a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye?
4. Mi a szög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye?

Oldjuk meg közösen!



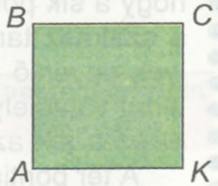
219. ábra

Bizonyítsátok be, hogy a háromszög két oldalának felező merőlegese metszi egymást!

BIZONYÍTÁS. Legyen n és m az ABC háromszög BC és AB oldalának felező merőlegese (219. ábra). Bebizonyítjuk, hogy n és m nem lehetnek egymással párhuzamosak. Kiindulunk az ellentétes állításból. Feltételezzük, hogy $n \parallel m$. Akkor az n-re merőleges egyenes merőleges lesz az m-re is. Tehát $BC \perp n$ és $BC \perp m$. De a feltétel szerint $AB \perp m$. Azonban két egyenes, melyek merőlegesek egy harmadik egyenesre, párhuzamos egymással. A feltételezésből, hogy $n \parallel m$ következik a háromszög AB és BC oldalainak párhuzamossága, ami lehetetlen. Tehát az n és m egyenesek nem lehetnek párhuzamosak, azaz metszik egymást.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!



220. ábra

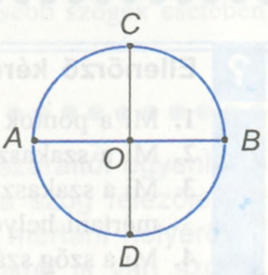
526. Igaz-e, hogy a szög felezőjének minden pontja egyenlő távolságra van a szög száraitól?

527. Igaz-e, hogy a szög felezője a szög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye?

528. Milyen alakzat az adott ponttól 2 m távolságra fekvő pontok mértani helye?

529. Milyen alakzat a két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye?

530. Az $ABCK$ alakzat négyzet (220. ábra). Mi az A és C pontoktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye? A B és K pontoktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye?

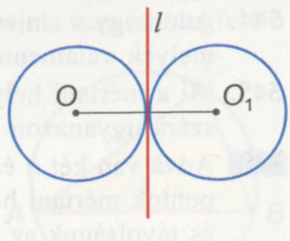


221. ábra

531. Az AB és CK egy kör egymásra merőleges átmérői (221. ábra). Mi az AB átmérő felező merőlegese?

532. Az AB szakasz felező merőlegese áthalad a C ponton. Igaz-e, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú?

533. Az O és O_1 középpontú egybevágó körök külső érintésűek (222. ábra). Igaz-e, hogy az érintési ponton áthaladó közös érintő az OO_1 szakasz felező merőlegese?



222. ábra

A

534. Adva vannak az A és B pontok. Szerkesszétek meg az A és B pontoktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

535. Szerkesszétek meg a derékszög szárai között lévő, a derékszög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

536. Szerkesszétek meg egy adott ponttól a távolságra fekvő pontok mértani helyét!

537. Mi az adott egyenestől adott távolságra fekvő pontok mértani helye?

538. Adott két párhuzamos egyenes. Szerkesszétek meg a két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

539. Határozzátok meg a két adott ponton átmenő körvonalak középpontjainak mértani helyét!

540. Határozzátok meg két egybevágó, egy adott egyenest érintő körök középpontjainak mértani helyét!

541. Határozzátok meg két egybevágó, egy adott ponton átmenő kör középpontjainak mértani helyét!

542. Adva van egy hegyesszög. Szerkesszétek meg a szög szárait érintő körök középpontjainak mértani helyét!

B

543. Határozzátok meg a $2r$ sugarú körök középpontjainak mértani helyét, melyek érintik a) az r sugarú; b) a $3r$ sugarú kört!

544. Adott egy 6 cm sugarú kör. Mi a mértani helye azon pontoknak, melyek valamennyi átmérőjét 1 : 2 arányban osztják?

545. Mi a mértani helye a derékszögek csúcsainak, melyek mindkét szára ugyanazon körnek az érintője?

546. Adva van két a és b párhuzamos egyenes. Szerkesszétek meg a pontok mértani helyét, melyek a két egyenes között fekszenek, és távolságuk az a és b egyenesektől úgy aránylik, mint 1 : 2!

547. Adva van két párhuzamos egyenes. Mi a pontok mértani helye, melyek távolsága a párhuzamos egyenesektől úgy aránylik, mint 2 : 3?

548. Adott egy 10 cm hosszúságú AB szakasz. Mi a mértani helye a pontoknak, amelyek a szakasz egyik végpontjától 6 cm, a másik végponttól 8 cm távolságra fekszenek?

549. Adva van egy téglalap, melynek oldalai 3 cm és 5 cm. Mi a mértani helye a pontoknak, amelyek 1 cm távolságra vannak valamelyik legközelebbi oldalához és:
a) a téglalap belső tartományában fekszenek; b) a téglalapon kívül fekszenek?

550. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög két szöge felezőjének metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom oldalától!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

551. Számítsátok ki a szög mértékét, mely 3-szor nagyobb mellékszögénél!

552. Lehet-e a háromszög egyik magassága 100-szor nagyobb a másik két magasság összegénél? Kisebb lehet-e 100-szor a másik két magasság összegénél?

553. A szögek felezői milyen háromszögben metszik egymást 45°-os szögben?

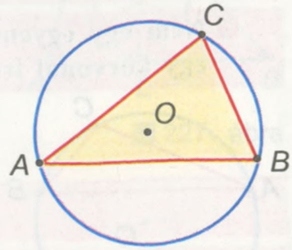
554. Milyen egyenlő szárú háromszöget oszt a magasság két egyenlő szárú háromszögre?

555. Határozzátok meg két egyenlő tompaszög mértékét, ha egyik száruk közös, a másik kettő pedig merőleges egymásra!

19. §. A körvonal és a háromszög

A körvonalnak a háromszöggel vagy nincs közös pontja vagy 1, 2, 3, 4, 5, 6 közös pontjuk van (a megfelelő rajzokat készítsétek el önállóan). Figyelmet érdemelnek azok az esetek, amikor a kör átmegy a háromszög három csúcsán, vagy amikor érinti a háromszög mindegyik oldalát. Megvizsgáljuk ezeket az eseteket részletesebben.

1. Körülírt körvonal. A körvonalat a *háromszög köré írtnak* mondjuk, ha átmegy a háromszög valamennyi csúcsán (223. ábra).

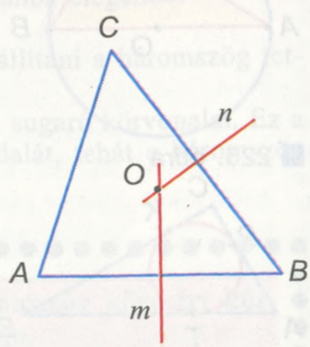


223. ábra

18. tantétel. Mindegyik háromszög köré csak egy körvonal írható. A körülírt kör középpontja a háromszög két oldalfelező merőlegesének metszéspontja.

BIZONYÍTÁS

Legyen ABC tetszőleges háromszög (224. ábra). Megkeressük a háromszög A, B és C csúcsától egyenlő távolságra fekvő pontot. Az A és B pontoktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye az AB szakasz m felező merőlegese[1]; a B és C pontoktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a BC szakasz n felező merőlegese. Ez a két felező merőleges nem lehet párhuzamos, mert metszik egymást valamilyen O pontban. Ez a pont egyenlő távolságra van az A, B és C pontoktól. Tehát $OA = OB = OC$, ezért O az ABC háromszög köré írt körvonal középpontja.



224. ábra

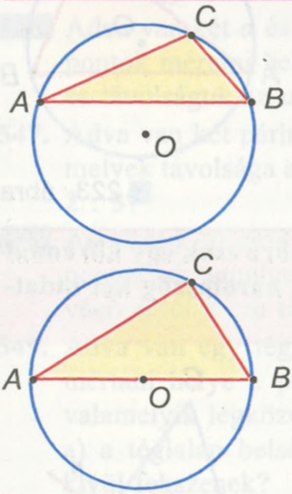
Mindegyik AB szakasznak csak egy és csakis egy m felező merőlegese van. A BC szakasznak is csak egy és csakis egy n felező merőlegese van. Ezeknek egy és csakis egy metszéspontjuk van. Tehát mindegyik háromszög köré csak egyetlen körvonal írható. □

[1] A háromszög felező merőlegesei olyan egyenesek, amik átmennek egy oldal felezőpontján és merőlegesek az oldalra.

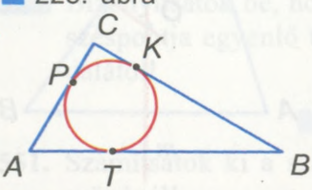
! KÖVETKEZMÉNYEK

- **Bármelyik háromszög három oldalának felező merőlegesei egy és ugyanazon ponton haladnak át.**

- **Nem egy egyenesen fekvő három ponton át egy és csakis egy körvonal írható.**



225. ábra



226. á

A bebizonyított tantételből következik a háromszög köré írt körvonal szerkesztésének módszere.

Az *ABC* háromszög köré írt körvonal megrajzolásához elegendő:

1) megszerkeszteni a háromszög két oldalának felező merőlegesét;

2) kijelölni a merőlegesek *O* metszéspontját;

3) az *O* középpontból megrajzolni az *OA* sugarú kört.

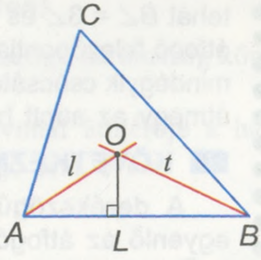
A háromszög köré írt körvonal középpontja lehet az adott háromszög belsejében vagy a háromszögön kívül, vagy az egyik oldalán (225. ábra).

2. Beírt körvonal. A körvonalat *háromszögbe írtnak* nevezzük, ha a háromszög mindegyik oldalát érinti (226. ábra). A háromszögbe írt körvonal középpontja az adott háromszög belsejében van.

! **19. tantétel. Minden háromszögbe csak egy kör írható. A háromszög két szögfelezőjének metszéspontja a beírt kör középpontja.**

BIZONYÍTÁS

Legyen *ABC* tetszőleges háromszög. Megkeressük a háromszög mindegyik oldalától egyenlő távolságra fekvő *O* pontot (227. ábra). Az *A* szög belső tartományában, az *AB* és *AC* oldalaktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye az *A* szög *l* felezője. A *B* szög belső tartományában, az *AB* és *BC* oldalaktól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a *B* szög *t* felezője. Ez a két szögfelező feltétlenül metszi egymást (bizonyítsátok be!). A szögfelezők *O* metszéspontja egyenlő távolságra van az adott háromszög mindhárom oldalától. Tehát az *O* pont az *ABC* háromszögbe írható körvonal középpontja.



227. ábra

! KÖVETKEZMÉNY

Mindegyik háromszögben a három szögfelező egy pontban metszi egymást.

A bebizonyított tantételből következik a háromszögbe írt körvonal szerkesztésének módszere.

A háromszögbe írt körvonal megrajzolásához elegendő:

1) megszerkeszteni két szög felezőjét;

2) *O* metszéspontjukból *OL* merőlegest állítani a háromszög tetszőleges oldalára;

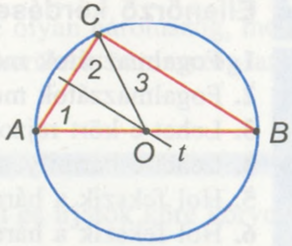
3) az *O* középpontból megrajzolni az *OL* sugarú körvonalat. Ez a körvonal érinti a háromszög mindhárom oldalát, tehát a háromszög beírt köre.

Érdeklődőknek

! 20. tantétel. A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.

Legyen *ABC* tetszőleges háromszög, melyben *C* szög derékszög. Az *AC* befogó felező merőlegese *t*, amely az *AB* átfogót az *O* pontban metszi (228. ábra).

Mivel az *O* pont az *AC* szakasz felező merőlegesén fekszik, ezért $OA = OC$ és $1\angle = 2\angle$. Akkor $B\angle = 90° - 1\angle$ és $3\angle = 90° - 1\angle$,



228. ábra

tehát $B\angle = 3\angle$ és $OB = OC$. $OA = OC = OB$, vagyis O az AB átfogó felezőpontja, mely egyenlő távolságra van a háromszög mindegyik csúcsától. Tehát az O középpontú és OA sugarú kör átmegy az adott háromszög mindegyik csúcsán.

KÖVETKEZMÉNY

A derékszögű háromszög köré írt körvonal átmérője egyenlő az átfogóval.

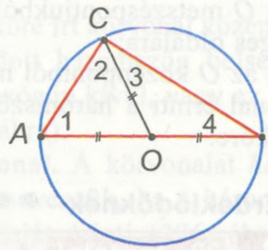
! **21. tantétel. A kör tetszőleges pontjából az átmérő, mely nem az adott pontból indul ki, derékszög alatt látszik.**

BIZONYÍTÁS

Legyen AB az O középpontú kör tetszőleges átmérője, és C az A és B pontoktól különböző tetszőleges pont a körvonalon (229. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $ACB\angle = 90°$. Mivel $OA = OB = OC$, ezért $1\angle = 2\angle$ és $3\angle = 4\angle$. Akkor $1\angle + 2\angle + 3\angle + 4\angle = 180°$, ebből $C\angle = 2\angle + 3\angle = 180° : 2\angle = 90°$.

FOGALMAZHATUNK ÍGY IS:

A sík pontjainak mértani helye, melyekből az AB szakasz derékszög alatt látszik, az AB átmérőjű körvonal. Valójában ezen pontok mértani helyéhez az A és B pontok nem tartoznak hozzá. Részletesebben erről a későbbiekben tanultok majd.



229. ábra

? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Fogalmazzátok meg, mi a háromszög köré írt körvonal!
2. Fogalmazzátok meg, mi a háromszögbe írt körvonal!
3. Lehet-e kört rajzolni bármilyen háromszög köré?
4. Lehet-e bármilyen háromszögbe kört rajzolni?
5. Hol fekszik a háromszögbe írt körvonal középpontja?
6. Hol fekszik a háromszög köré írt körvonal középpontja? És a derékszögű háromszög köré írt körvonal középpontja?

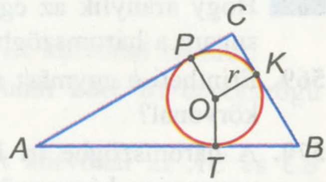
• Oldjuk meg közösen!

1. Határozzátok meg a 6 cm átfogójú derékszögű háromszög köré írt körvonal sugarát!

■ A derékszögű háromszög köré írt körvonal átmérője a háromszög átfogója. Sugara tehát az átfogó fele, 3 cm.

2. **Bizonyítsátok be, hogy az *a* és *b* befogójú, *c* átfogójú derékszögű háromszögbe írt körvonal átmérője egyenlő $a + b - c$!**

■ Legyen az ABC háromszögben C szög derékszög, K, P, T a háromszögbe írt körvonal érintési pontjai (230. ábra). Mivel $AP = AT$ és $BK = BT$, ezért $AC + BC - AB = PC + CK = 2r$, vagy $2r = a + b - c$.



■ 230. ábra

• FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

556. Hány közös pontja lehet a körvonalnak és az egyenesnek?

557. Hány közös pontja lehet a körlapnak és az egyenesnek?

558. Hány közös pontja lehet a háromszögnek és a köréje írt körvonalnak?

559. Hány közös pontja lehet a körvonalnak és a háromszögnek?

560. Rajzolható-e körvonal tetszőleges 4 ponton keresztül?

561. Rajzolható-e az 1 m átmérőjű körbe olyan háromszög, melynek kerülete 8 m? Rajzolható-e 8 cm kerületű háromszög az 1 m átmérőjű körbe?

A

562. Rajzoljatok tetszőleges háromszöget és írjatok köré körvonalat!

563. Rajzoljatok tetszőleges háromszöget és írjatok bele körvonalat!

564. A körvonal AB és BC húrjai egyenlők a sugárral. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

565. Bizonyítsátok be, hogy nincs olyan körvonal, amely áthaladna három, egy egyenesen fekvő ponton!

566. Miért nem lehet két különböző körvonalnak három közös pontja?

567. Hasonlítsátok össze a körvonal hosszát a beírt háromszög kerületével!

568. Hogy aránylik az egyenlő oldalú háromszög köré írt körvonal sugara a háromszögbe írt körvonal sugarához?

569. Érintheti-e egymást a háromszög köré írt és a háromszögbe írt körvonal?

570. A háromszögbe írt körvonal középpontja lehet-e középpontja ugyanazon háromszög köré írt körvonalnak?

571. Mutassátok be rajzon, hogy a háromszög köré írt körvonal középpontja fekhet a háromszög belsejében, a háromszög oldalán vagy a háromszögön kívül!

572. Az egyenlő szárú háromszög köré körvonal van írva. A körvonal középpontjából milyen szög alatt látszanak a háromszög szárai?

573. Az egyenlő oldalú háromszögbe kör van írva. Milyen szög alatt látszanak a háromszög oldalai a kör középpontjából?

574. Az ABC egyenlő oldalú háromszög köré írt körvonal O középpontja szakaszokkal össze van kötve a háromszög csúcsaival. Bizonyítsátok be, hogy az OAB, OBC és OCA háromszögek egyenlők egymással! Határozzátok meg ezen háromszögek szögeit!

B

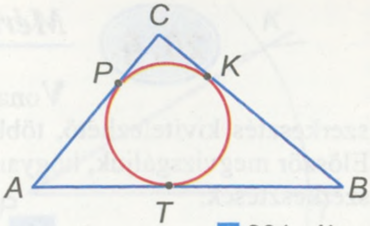
575. A derékszögű háromszög oldalai 6 cm, 8 cm és 10 cm. Hány centiméter a háromszög köré írt körvonal sugara?

576. Minden háromszög, melynek oldalai a 3, 4 és 5 számokkal arányosak, derékszögű. Határozzátok meg a háromszög köré írt körvonal sugarát, ha a háromszög oldalai 15 m, 20 m és 25 m hosszúak!

577. Az egyik körvonal az egyenlő oldalú háromszögbe, a másik ugyanezen háromszög köré van írva. Bizonyítsátok be, hogy:

1) a körvonalak középpontjai egybeesnek;

2) a körvonalak sugarai úgy aránylanak, mint 1 : 2!



231. ábra

578. Az ABC háromszögbe írt körvonal és a háromszög érintési pontjai K, P és T (231. ábra). Bizonyítsátok be, hogy:

1) $AP + CK + BT = AT + BK + CP$;

2) $BK = 0{,}5(AB + BC - AC)$!

579. Határozzátok meg a 3 m, 4 m és 5 m oldalú derékszögű háromszögbe írt körvonal sugarát!

580. Határozzátok meg az r sugarú körvonal köré írt derékszögű háromszög kerületét, ha átfogója c!

581. Az ABC derékszögű háromszögbe írt körvonal az AC és CB befogókat P és K pontokban érinti. Határozzátok meg a $KBAP$ töröttvonal hosszát, ha $AB = 17$ cm!

582. A 120°-os B szög száraira $AB = BC = 4$ cm hosszú szakaszokat mértek fel. Rajzoljatok kört az A, B és C pontok köré, és számítsátok ki a sugarát!

583. Bizonyítsátok be, hogy a súlyvonalak egyike (melyik?) a derékszögű háromszöget két egyenlő szárú háromszögre osztja!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

584. Számítsátok ki a 8 cm sugarú körvonal hosszát, és az ugyanakkora sugarú körlap területét!

585. Határozzátok meg a 200 m kerületű téglalap területét, ha egyik oldala másfélszer nagyobb a másiknál!

586. Az $ABC\triangle = MNK\triangle$. Az $ABC\triangle$ oldalainak aránya 2 : 3 : 4. Határozzátok meg az $MNK\triangle$ oldalait, ha kerülete 45 cm!

587. Az $ABC\triangle = MNK\triangle$, $AC = 17$ cm, $MN - NK = 5$ cm. Határozzátok meg az $ABC\triangle$ oldalait, ha kerülete 38 cm!

588. A háromszög oldalainak aránya 7, 5 és 8. Határozzátok meg a háromszög kerületét, ha:

a) a legkisebb és legnagyobb oldalak összege 39 cm;

b) a legnagyobb és legkisebb oldal különbsége 9 cm;

c) a legkisebb oldal 12-cm-rel rövidebb a félkerületnél;

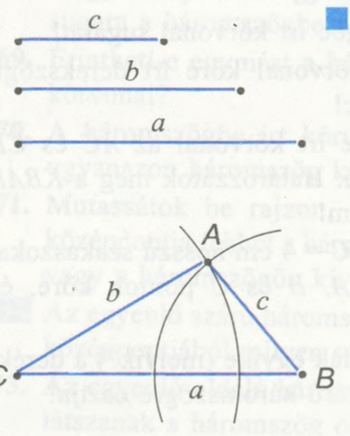
d) a legnagyobb oldal 8 cm-rel kisebb a másik kettő összegénél!

20. §. *Mértani szerkesztések*

Vonalzó[1] és körző segítségével sok mértani szerkesztés kivitelezhető, többek között mértani alakzatok rajzolása. Először megvizsgáljuk, hogyan végezhetők el a legegyszerűbb mértani szerkesztések.

1. FELADAT. Szerkesszetek háromszöget adott oldalai alapján!

MEGOLDÁS. Legyen adva három szakasz: a, b és c (232. ábra). Háromszöget szerkesztünk, melynek oldalai egyenlők az adott szakaszok hosszával. Vonalzóval egy tetszőleges egyenest rajzolunk. Megjelölünk rajta valamilyen B pontot, majd körzővel rámérjük az egyenesre a $BC = a$ szakaszt. Körzőnyílásba vesszük a c szakaszt, majd B középpontú körívet rajzolunk. A CB egyenes ugyanazon oldalán C középpontú, b sugarú körívet rajzolunk. Az ívek A metszéspontját szakaszokkal összekötjük a B és C pontokkal. Az ABC háromszög lesz a szerkesztési feladat megoldása, mivel BC, AC és AB oldalai egyenlők a megadott szakaszokkal.



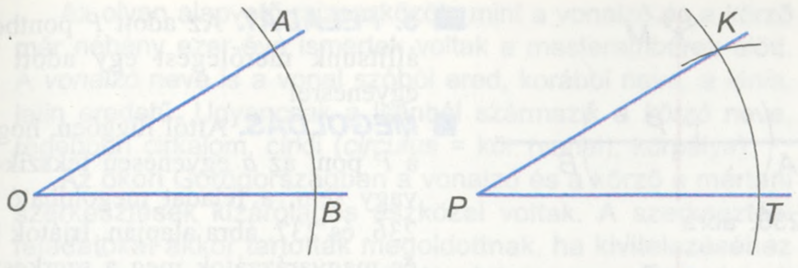
232. ábra

MEGJEGYZÉS. Ha az ívek nem metszik egymást, a háromszög nem szerkeszthető meg. Ez akkor fordul elő, ha az adott szakaszok valamelyike nagyobb vagy egyenlő a másik kettő összegénél.

2. FELADAT. Szerkesszünk adott szöggel egyenlő szöget!

MEGOLDÁS. Adott az AOB szög. Meg kell szerkeszteni egy vele egyenlő KPT szöget (233. ábra). Rajzolunk egy PT félegyenest, valamint két, O és P középpontú egyenlő sugarú ívet. Az ívek egyike az AOB szöget A és B pontokban fogja metszeni, a másik a PT félegyenest pedig a T pontban. Körzőnyílásba véve az AB szakaszt, T középpontú ívet rajzolunk. Ez az ív az előbbit K pontban metszi. Megrajzoljuk a PK félegyenest. A KPT szög lesz a megszerkeszteni kívánt szög.

[1] Feltételezzük, hogy a vonalzó beosztás nélküli.

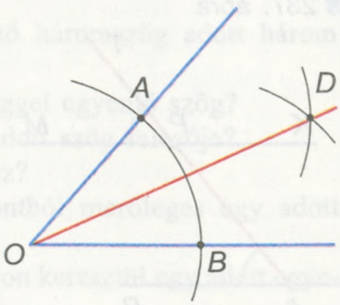


233. ábra

Mivel a KPT és AOB háromszögek egyenlők (három oldaluk alapján), ezért $KPT\angle = AOB\angle$.

3. FELADAT. Szerkesszétek meg egy adott szög szögfelezőjét!

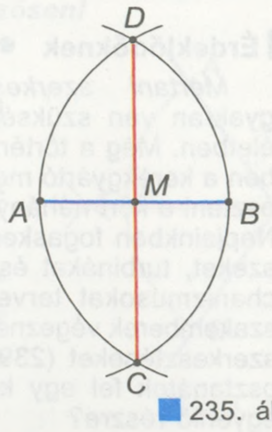
MEGOLDÁS. Adva van az AOB szög (234. ábra). Tetszőleges körzőnyílással O középpontú ívet rajzolunk. Metssze az ív A és B pontokban az OA és OB félegyeneseket. Ugyanezen körzőnyílással az A és B pontokból íveket rajzolunk. Ha az ívek a D pontban metszik egymást, akkor az OD félegyenes az AOB szög szögfelezője. Valóban, $AOD\triangle = BOD\triangle$ három oldaluk egyenlősége folytán. Ezért $AOD\angle = DOB\angle$.



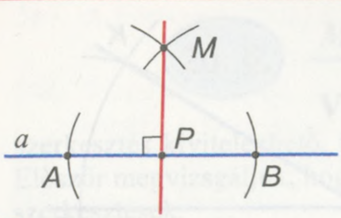
234. ábra

4. FELADAT. Felezzünk meg egy adott szakaszt!

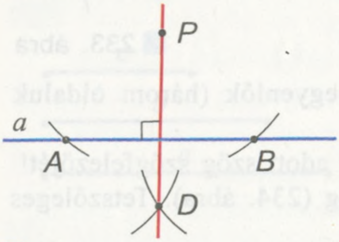
MEGOLDÁS. Legyen AB az adott szakasz (235. ábra). Az A és B pontokból AB sugarú köríveket rajzolunk. Az ívek valamilyen C és D pontokban metszik egymást. A CD egyenes M pontja lesz az AB szakasz felezőpontja. Valóban, a három oldal egyenlősége folytán $ACD\triangle = BCD\triangle$, ezért $ACM\angle = BCM\angle$. A háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján $ACM\triangle = BCM\triangle$. Tehát $AM = BM$.



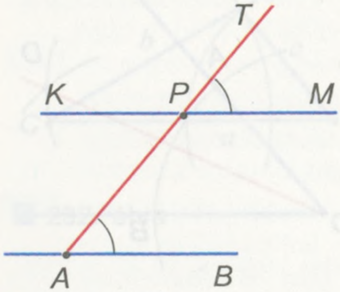
235. ábra



236. ábra



237. ábra



238. ábra

5. FELADAT. Az adott P pontból állítsunk merőlegest egy adott a egyenesre!

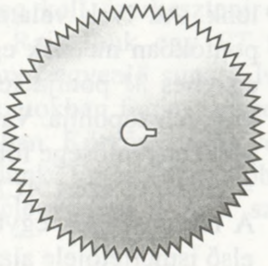
MEGOLDÁS. Attól függően, hogy a P pont az a egyenesen fekszik-e vagy sem, a feladat megoldható a 236. és 237. ábra alapján. Írjátok le és magyarázzátok meg a szerkesztéseket önállóan!

6. FELADAT. Az AB egyenesen kívül fekvő P ponton keresztül szerkesszünk az AB egyenessel párhuzamos egyenest!

MEGOLDÁS. A P ponton és az AB egyenes tetszőleges pontján át AT egyenest rajzolunk (238. ábra). Szerkesztünk a PAB szöggel egyenlő TPM szöget úgy, hogy ezek a szögek a PM és AB egyenesek, illetve az AP metsző egyenes társszögei legyenek. Az így kapott PM egyenes megfelel a feladat feltételeinek, mert átmegy a P ponton és párhuzamos az AB egyenessel, mivel $TPM\angle = PAB\angle$.

Érdeklődőknek

Mértani szerkesztésekre igen gyakran van szükség a mindennapi életben. Még a történelem előtti időkben a kerékgyártó mesterek fel tudták osztani a kört néhány egyenlő részre. Napjainkban fogaskerekeket, körfűrészeket, turbinákat és más forgó mechanizmusokat tervező vagy gyártó szakemberek végeznek ehhez hasonló szerkesztéseket (239. ábra). Hogyan osztanátok fel egy kört 5, 6 vagy 7 egyenlő részre?



239. ábra

Az olyan alapvető rajzeszközök, mint a vonalzó és a körző már néhány ezer éve ismertek voltak a mesteremberek előtt. A *vonalzó* neve is a vonal szóból ered, korábbi neve, a *lénia*, latin eredetű. Ugyancsak a latinból származik a *körző* neve, régebben cirkalom, cirkli (*circulus* = kör (vonal), körpálya).

Az ókori Görögországban a vonalzó és a körző a mértani szerkesztések kizárólagos eszközei voltak. A szerkesztési feladatokat akkor tartották megoldottnak, ha kivitelezéséhez körzőt és vonalzót használtak. Napjainkban a szakemberek a mértani szerkesztésekhez egyéb eszközöket is használnak, például derékszög vonalzót, fejes vonalzót, vinklit, szögmérőt, párhuzamrajzolót és egyéb műszaki rajzeszközt.

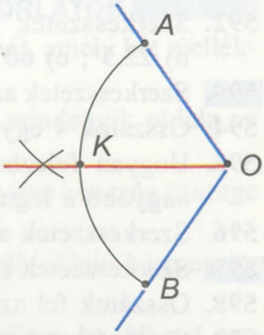
? Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Mondd el, hogyan szerkeszthető háromszög adott három oldala alapján!
2. Hogyan szerkeszthető adott szöggel egyenlő szög?
3. Hogyan szerkeszthető meg az adott szög felezője?
4. Hogyan felezhető meg a szakasz?
5. Hogyan szerkeszthető adott pontból merőleges egy adott egyenesre?
6. Hogyan szerkeszthető adott ponton keresztül egy adott egyenessel párhuzamos egyenes?

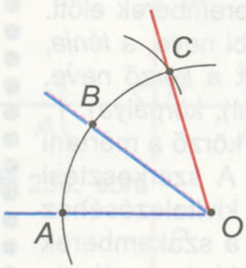
• Oldjuk meg közösen!

1. Osszuk két egyenlő részre a körvonal adott ívét!

Adott az O középpontú kör AB íve (240. ábra). Elképzeljük az AOB szöget, és megszerkesztjük OK szögfelezőjét. Az AOK és KOB háromszögek egyenlők, ezért az AK és KB ívek is egyenlők egymással.



240. ábra



241. ábra

2. Szerkesszünk az adott szögnél kétszer nagyobb szöget!

Legyen AOB az adott szög (241. ábra). Rajzolunk egy O középpontú körívet. Ez a körív az A és B pontokban metszi a szög szárait. A B pontból mint középpontból $BC = BA$ metszést készítünk, és meghúzzuk az OC félegyenest. A kapott AOC szög kétszer nagyobb lesz az AOB szögnél, mivel $AOB\triangle = BOC\triangle$.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

OLDJÁTOK MEG FEJBEN!

589. Melyik állítás igaz?

a) A szög két egyenlő részre való osztásához meg kell rajzolni szögfelezőjét.

b) A szakasz megfelezéséhez meg kell rajzolni felező merőlegesét.

c) A körív két egyenlő részre való osztásához meg kell rajzolni az ív két végpontját összekötő szakasz felező merőlegesét.

d) A háromszög köré írt körvonal középpontjának meghatározásához meg kell rajzolni két oldalának felező merőlegesét.

A

590. Osszátok négy egyenlő részre az adott szöget!

591. Szerkesszetek derékszöget!

592. Szerkesszetek olyan szöget, melynek fokmértéke: a) 45°; b) 22,5°; c) 60°; d) 30°!

593. Szerkesszetek az adott hegyesszögnél háromszor nagyobb szöget!

594. Osszátok 4 egyenlő részre az adott szakaszt!

595. Hogyan felezhető meg a szakasz, ha hosszúsága néhányszor nagyobb a legnagyobb körzőnyílásnál?

596. Szerkesszetek az adott szakasznál kétszer nagyobb szakaszt!

597. Szerkesszetek az adott szakasznál háromszor nagyobb szakaszt!

598. Osszátok fel az adott körívet négy egyenlő részre!

599. Szerkesszetek adott háromszöggel egyenlő háromszöget!

600. Szerkesszetek egyenlő oldalú háromszöget adott oldal alapján!

601. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget adott alapja és szára alapján!

602. Két adott befogója alapján szerkesszetek derékszögű háromszöget!

603. Szerkesszetek háromszöget két oldala és a köztük fekvő szög alapján!

604. Szárszöge és szára alapján szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget!

605. Egy adott oldal és a rajta fekvő két szög alapján szerkesszétek meg a háromszöget!

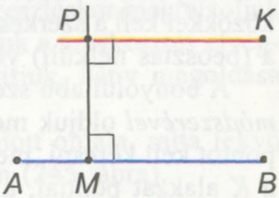
606. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget alapja és az alapon fekvő szög ismeretében!

B

607. Szerkesszetek 3 cm, 4 cm és 5 cm oldalhosszúságú háromszöget! Rajzoljatok kört a háromszög köré!

608. Szerkesszetek háromszöget, és húzzátok meg súlyvonalait!

609. Szerkesszétek meg az adott háromszög szögfelezőit!



242. ábra

610. Adva van egy háromszög. Szerkesszétek meg mindegyik magasságát! Vizsgáljatok meg minden lehetséges esetet!

611. Hogy az adott P ponton keresztül az AB egyenessel párhuzamost húzhassunk, eljárhatunk úgy is, hogy először megszerkesztjük a $PM \perp AB$, majd a $PK \perp PM$ merőlegeseket (242. ábra). Igazoljátok a gondolatmenet helyességét!

612*. Egy adott egyenes egyik pontján át rajzoljatok egyenest, mely adott szög alatt metszi az adott egyenest!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

613. Határozzátok meg annak a szögnek a mértékét, amely két mellékszögével összesen 300°-os szöget alkot!

614. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyzet mindegyik oldala az AC egyenessel 45°-os szöget alkot!

615. Határozzátok meg a háromszög fajtáját, melyben két szög összege kisebb a harmadik szögnél!

616. Milyen szög alatt metszi egymást az egyenlő oldalú háromszög két súlyvonala?

617. Szerkesszetek ABC egyenlő oldalú háromszöget, ha $AB = 4$ cm, és rajzoljatok köré kört!

21. §. Szerkesztési feladatok

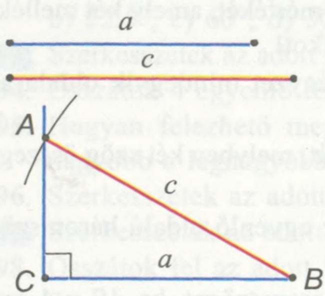
Mértani szerkesztéseket különböző szakmák művelői alkalmaznak. E szakmák képviselői: a műszaki rajzolók, az építészek, a tervezők, a tereptérképészek, a földmérők, a navigátorok. Mértani alakzatokat szerkeszt: a lakatos a bádoglemezen, az asztalos a deszkán, a szabász a szöveten, a kertész a talajon.

Az ilyen típusú feladatok teljesítése során adott feltételeknek megfelelő mértani alakzatok szerkesztését végzik. A geometriai szerkesztéseket leggyakrabban vonalzó és körző segítségével készítik. Amennyiben a feladatban nincs külön utalás arra, hogy milyen eszközökkel kell a szerkesztést elvégezni, akkor a szerkesztéshez elegendő a (beosztás nélküli) vonalzó és körző.

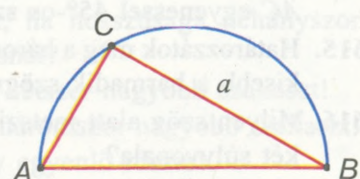
A bonyolultabb szerkesztési feladatokat gyakran a *mértani helyek módszerével* oldjuk meg. Azt kaptuk például feladatul, hogy olyan X pontot kell keresni, mely két feltételnek felel meg. Ha az első feltételt a K alakzat pontjai, a másikat pedig a P alakzat pontjai elégítik ki, akkor az X pont mindkét alakzathoz hozzátartozik. Tehát X – a K és P alakzat metszéspontja.

FELADAT. Szerkesszetek derékszögű háromszöget a befogója és c átfogója alapján (243. ábra)!

MEGOLDÁS. Szerkesztünk egy ACB derékszöget. Egyik szárára felmérjük a $CB = a$ szakaszt. A C és B pont a szerkesztendő háromszög két csúcsa. A harmadik csúcsnak először is a CA félegyenesen kell feküdni, másodszor a B ponttól c távolságra, azaz a c sugarú, B középpontú körvonalon. Ha ez a körvonal a CA félegyenest az A pontban metszi, akkor ACB háromszög az, amelyet meg kellett szerkeszteni. Azaz C szöge derékszög, $BC = a$, $BA = c$.



243. ábra



244. ábra

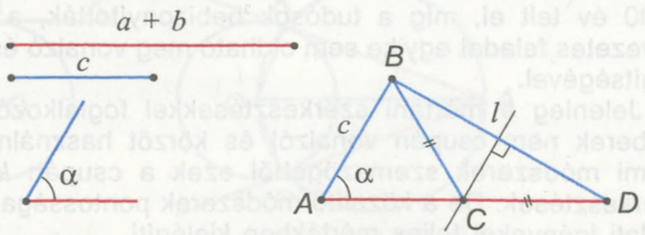
Második módszer (244. ábra). Megrajzoljuk az $AB = c$ szakaszt, és AB átmérőjű kört rajzolunk. Ez a kör azon pontok mértani helye, amelyekből az AB szakasz derékszög alatt látszik. Újabb kört rajzolunk a sugárral és B középponttal, amely a B ponttól a távolságra fekvő pontok mértani helye. Ha a két kör a C pontban metszi egymást, az ABC háromszög lesz az, amelyet szerkesztenünk kellett. A két kör még C_1 pontban is egymást metszi. Mivel azonban az ABC és ABC_1 háromszögek egyenlők, ezért egy megoldásnak tekinthető.

A szerkesztési feladatok megoldásának összetevő részei: az *analízis,* a *szerkesztés,* a *bizonyítás* és a *vizsgálat.* Az analízis során keressük a feladat megoldásának módját, a szerkesztéskor megrajzoljuk az alakzatot, a bizonyítás során megmagyarázzuk a szerkesztés elvégzésének helyességét, a vizsgálatban megvilágítjuk, hány megoldása van a feladatnak.

FELADAT. Szerkesszünk háromszöget adott oldala, rajta fekvő szöge és a másik két oldal összege alapján (245. ábra).

MEGOLDÁS.

- Analízis. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög meg van szerkesztve. Egyik oldala c és $A\angle = \alpha$ adott. Ugyszintén ismert az a és b oldalak összegével egyenlő szakasz. Az ismert c és $a + b$ szakaszok, valamint a köztük fekvő $A\angle$ alapján $ABD\triangle$ szerkeszthető. A keresett háromszög C csúcsa az AD szakasz azon pontja, amelyre igaz, $CD = CB$. Tehát a C pontnak a BD szakasz felező merőlegesén kell feküdni.
- Szerkesztés. A két adott szakasz, valamint a köztük fekvő szög alapján megszerkesztünk egy ABD háromszöget. Ezután megrajzoljuk a BD szakasz l felező merőlegesét. Az l egyenes az AD szakaszt a C pontban metszi. Meghúzzuk a CB szakaszt. Az ABC háromszög lesz az, amit meg kellett szerkeszteni.



245. ábra

- B i z o n y í t á s. Az ABC háromszögben $AB = c$, $A\angle = \alpha$ szerkesztés szerint. $AC + CB = AC + CD = a + b$. Tehát az $ABC\triangle$ kielégíti a feladat összes feltételét.
- V i z s g á l a t. A feladatnak csak akkor van megoldása, ha $a + b > c$.
- M e g j e g y z é s. Ha a feladat nem összetett és megoldásának módszere ismert, az analízist nem szükséges leírni. A megoldás során pedig nem feltétlenül kell hangsúlyozni az analízist, szerkesztést, bizonyítást és vizsgálatot.

Érdeklődőknek

A matematikában leggyakrabban számítási, bizonyítási, szerkesztési, átalakítási és vizsgálati feladatokkal találkozunk. Mértani szerkesztési feladatokkal előszeretettel foglalkoztak az ókori matematikusok. Csak *elemi szerkesztéssel* foglalkoztak (amelyek vonalzó és körző segítségével megoldhatók), keresték a különböző szerkesztési feladatok megoldását. Többek között vizsgálták:

1) lehet-e egy szöget három egyenlő részre osztani;
2) lehet-e szerkeszteni körzővel és vonalzóval adott körhöz vele egyenlő területű négyzetet;
3) megszerkeszthető-e egy olyan kocka éle, melynek térfogata kétszerese egy adott kocka térfogatának.

Kiváló matematikusok évszázadokon át próbálták megoldani ezeket a feladatokat sikertelenül. A régmúlt *három klasszikus feladata* külön nevet kapott: 1) *szögharmadolás*, 2) *körnégyszögesítés*, 3) *kocka kettőzése*. Utóbbi feladat déloszi probléma néven ismert, mely kapcsolatos egy ógörög legendával. Délosz szigetén a pestis dühöngött. A délosziak a delphoi jósdához fordultak tanácsért. Azt a választ kapták, hogy ha a pestistől meg alkarnak szabadulni, cseréljék ki Apolló kocka alakú oltárkövét kétszer akkorára. Majdnem 2000 év telt el, míg a tudósok bebizonyították, a három nevezetes feladat egyike sem oldható meg vonalzó és körző segítségével.

Jelenleg a mértani szerkesztésekkel foglalkozó szakemberek nem csupán vonalzót és körzőt használnak. Az elemi módszerek szemszögéből ezek a csupán *közelítő* szerkesztések. De a közelítő módszerek pontossága a gyakorlati igényeket teljes mértékben kielégíti.

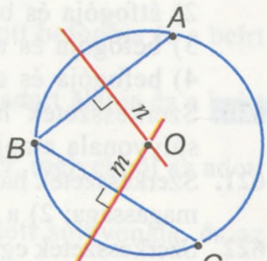
Ellenőrző kérdések és feladatok

1. Milyen eszközökkel végzik el leggyakrabban a mértani szerkesztéseket?
2. Soroljátok fel a mértani szerkesztések sorrendjét, összetevőit!
3. Mi a *szögharmadolás*, *körnégyszögesítés*, *kockakettőzés* (*déloszi probléma*)?

Oldjuk meg közösen!

1. Adott kör középpontjának megtalálása.

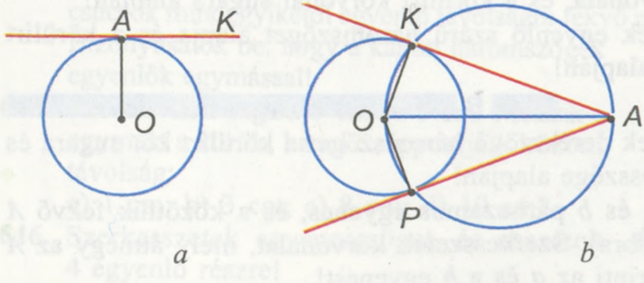
Jelöljünk ki az adott körön három tetszőleges A, B és C pontot (246. ábra). Megrajzoljuk az AB és CB húrokat, és megszerkesztjük n és m felező merőlegeseiket. Az n és m egyenesek O metszéspontja lesz a kör középpontja, mert $OA = OB = OC$.



246. ábra

2. Rajzoljatok érintőt adott körhöz adott ponton át!

Ha az adott pont az O középpontú körvonalon fekszik (247. *a* ábra), meghúzzuk az OA félegyenest, majd az OA félegyenesre merőleges AK egyenest. Az AK egyenes a megrajzolni kívánt érintő. Ha az adott pont kívül fekszik az adott O középpontú körvonalon (247. b ábra), akkor OA átmérőjű kört rajzolunk. Ez a kör K és P pontokban metszi az adott körvonalat. Az AK és AP egyenesek a keresett érintők, mert $AK \perp OK$ és $AP \perp OP$. (A kisegítő körvonal K és P pontjából az OA átmérő AKO és APO derékszög alatt látszik.) Ebben az esetben a feladatnak két megoldása van.



247. ábra

Ha az A pont a körvonalon belül fekszik, akkor a feladatnak nincs megoldása, mert érintő nem rajzolható.

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK

A

618. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget adott alapja és az alapra bocsátott magassága alapján!

619. Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adott:
1) átfogója és hegyesszöge;
2) átfogója és befogója;
3) befogója és a hozzá tartozó hegyesszög;
4) befogója és a szemben fekvő hegyesszöge!

620. Szerkesszetek háromszöget két oldala és az egyikhez húzott súlyvonala alapján!

621. Szerkesszetek háromszöget két oldala és: 1) az egyik oldalra húzott magassága; 2) a harmadik oldalra húzott magassága alapján!

622. Szerkesszetek egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha adva van: 1) egy befogója; 2) átfogója; 3) az átfogóhoz húzott súlyvonala!

623. Találjátok meg egy adott egyenes azon pontját, mely adott távolságra fekszik egy másik adott egyenestől!

624. Találjátok meg egy adott egyenesen azt a pontot, amely egyenlő távolságra fekszik két másik adott ponttól!

625. Szerkesszetek körvonalat, amely érinti az adott szög szárait, és ezek egyikét egy adott pontban!

626. Szerkesszetek derékszögű háromszöget adott befogója és a körülírt körvonal sugara alapján!

627. Szerkesszetek háromszöget két oldala és a körülírt kör sugara alapján!

628. Szerkesszetek háromszöget egy oldala, az ehhez az oldalhoz húzott súlyvonala, és a körülírt körvonal sugara alapján!

629. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget alapja és a körülírt kör sugara alapján!

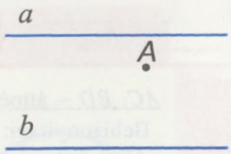
B

630. Szerkesszetek derékszögű háromszöget a körülírt kör sugara és egyik hegyesszöge alapján!

631. Adva van a és b párhuzamos egyenes, és a közöttük fekvő A pont (248. ábra). Szerkesszetek körvonalat, mely átmegy az A ponton és érinti az a és a b egyenest!

632*. Szerkesszetek egyenlő oldalú háromszöget a körülírt kör adott sugara alapján!

633. Hogyan szerkeszthető közös érintő:
a) két egyenlő sugarú körhöz;
b) két különböző sugarú körhöz?



248. ábra

634. Szerkesszétek meg a derékszögű háromszöget átfogója, és a derékszög csúcsából húzott magassága alapján!

635. Szerkesszetek derékszögű háromszöget adott befogója és a másik két oldal összege alapján!

636. Szerkesszetek derékszögű háromszöget adott befogója és a beírt kör sugara alapján!

637. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget adott alapja és a beírt kör sugara alapján!

638*. Szerkesszétek meg a pontok mértani helyét, melyekből az adott a szakasz 90°-os szög alatt látszik!

639. Szerkesszetek derékszögű háromszöget adott súlyvonala, és az átfogóra bocsátott magassága alapján!

640. Hogyan lehet közelítőleg felosztani:
a) a körvonalat 7 egyenlő részre;
b) tetszőleges szöget 3 egyenlő részre;
c) tetszőleges ívet 5 egyenlő részre?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

641. Osszátok fel a derékszöget 3 egyenlő részre!

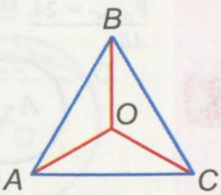
642. Az $ABC\triangle$ B csúcsából BH magasság és BM súlyvonal van húzva. $AH = 3$ cm, $AC = 10$ cm. Számítsátok ki HM-et, ha: 1) az $A\angle$ hegyesszög; 2) az $A\angle$ tompaszög!

643. Bizonyítsátok be, hogy két csúcsszög szögfelezői egy egyenesen fekszenek!

644. Az egyenlő oldalú háromszög mindhárom csúcsát összekötötték a csúcsok mindegyikétől egyenlő távolságra fekvő ponttal (249. ábra). Bizonyítsátok be, hogy a kapott háromszögek egyenlők egymással!

645. Két körvonal sugara 3 cm és 5 cm. Metszik-e egymást a körök, ha a középpontjaik közötti távolság:
a) 1 cm; b) 3 cm; c) 8 cm; d) 10 cm?

646. Szerkesszetek egyenesszöget, és osszátok 4 egyenlő részre!



249. ábra

Rajzos feladatok

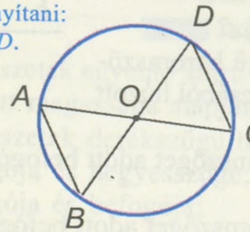
A

1

AC, BD – átmérők.

Bebizonyítani:

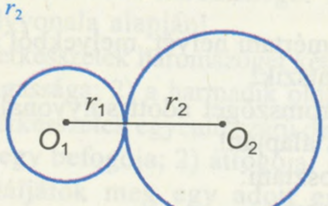
$AB \parallel CD$.



2

$r_1 : r_2 = 2 : 3$, $O_1O_2 = 15$.

r_1, r_2

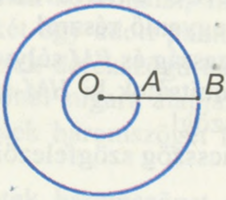


3

$OB = 3OA$,

$AB = 18$.

OA, OB

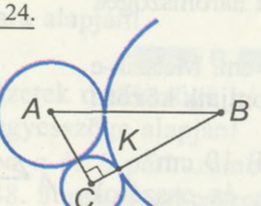


4

$CK = 2$, $KB = 7$,

$P_{\triangle ABC} = 24$.

AB



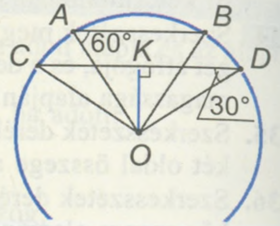
B

1

$AB = 8$, $A\angle = 60°$,

$D\angle = 30°$.

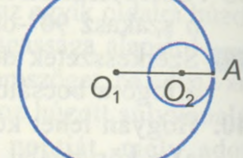
OK



2

$O_1A = 3O_2A$, $O_1O_2 = 10$.

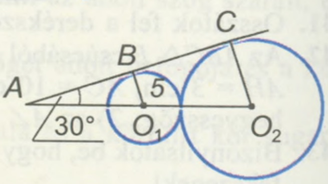
O_1A, O_2A



3

BC – közös érintő.

CO_2

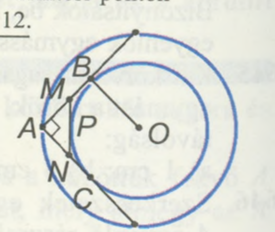


4

B, P, C – érintési pontok

$P_{\triangle AMN} = 12$.

OB

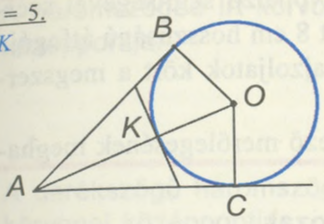


Rajzos feladatok

5

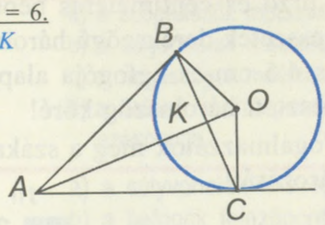
A

$A\angle = 60°$,
$OB = 5.$
AK



B

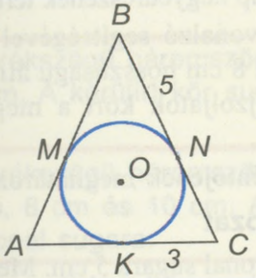
$BAC\angle = 60°$,
$OB = 6.$
AK



6

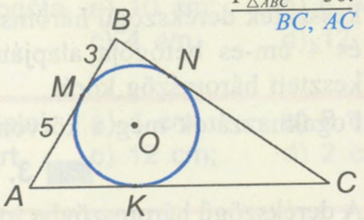
A

$AB = BC$,
$BN = 5$,
$KC = 3.$
$P_{\triangle ABC}$



B

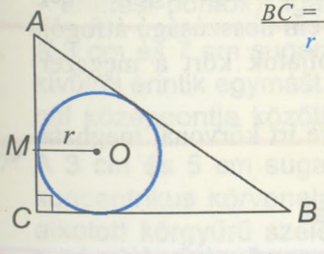
$MB = 3$, $AM = 5$,
$P_{\triangle ABC} = 30.$
BC, AC



7

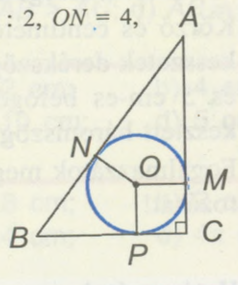
A

$AB = 25$, $AC = 7$,
$BC = 24.$
r



B

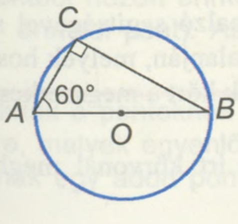
$AN : NB = 3 : 2$, $ON = 4$,
$P_{\triangle ABC} = 48.$
AB, BC, AC



8

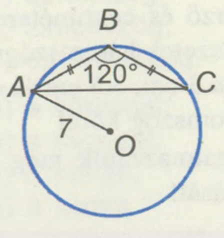
A

$AC = 10.$
AO



B

$OA = 7$, $B\angle = 120°$,
$AB = BC.$
AB



• 5. számú önálló munka

1. változat

1°. Számítsátok ki a 10 cm sugarú körvonal negyedrészének hosszát!

2•. Körző és centiméteres beosztású vonalzó segítségével szerkesszetek derékszögű háromszöget 8 cm hosszúságú átfogója és 4,5 cm-es befogója alapján! Rajzoljatok kört a megszerkesztett háromszög köré!

3°. Fogalmazzátok meg a szakasz felező merőlegesének meghatározását!

2. változat

1°. Számítsátok ki a 20 cm sugarú körlap negyedrészének területét!

2•. Körző és centiméteres beosztású vonalzó segítségével szerkesszetek derékszögű háromszöget 8 cm hosszúságú átfogója és 4 cm-es befogója alapján! Rajzoljatok kört a megszerkesztett háromszög köré!

3°. Fogalmazzátok meg a körvonal érintőjének meghatározását!

3. változat

1°. A derékszögű háromszögbe írt körvonal sugara 5 cm. Mennyivel több a befogók hosszának összege az átfogó hosszánál?

2•. Körző és centiméteres beosztású vonalzó segítségével szerkesszetek derékszögű háromszöget 8 cm hosszúságú átfogója és 5 cm-es befogója alapján! Rajzoljatok kört a megszerkesztett háromszög köré!

3°. Fogalmazzátok meg a háromszög köré írt körvonal meghatározását!

4. változat

1°. Határozzátok meg a derékszögű háromszög átfogóját, ha a körülírt kör sugara r!

2•. Körző és centiméteres beosztású vonalzó segítségével szerkesszetek háromszöget három oldala alapján, melyek hosszúsága 3 cm, 3,5 cm és 4 cm! Rajzoljatok kört a megszerkesztett háromszög köré!

3°. Fogalmazzátok meg a háromszögbe írt körvonal meghatározását!

5. számú teszt feladatsor

1.	A kör átmérője 6 cm. A körvonal hossza:	a) 6π cm; b) 3π cm; c) 9π cm; d) 36π cm.
2.	A háromszögbe írt körvonal középpontja:	a) a szögfelezők metszéspontja; b) a súlyvonalak metszéspontja; c) a magasságok metszéspontja; d) a felező merőlegesek metszéspontja.
3.	A derékszögű háromszög köré írt körvonal középpontja:	a) a súlyvonalak felezőpontja; b) a befogók felezőpontja; c) az átfogók felezőpontja; d) a szögfelezők felezőpontja.
4.	A derékszögű háromszög átfogója 12 cm. A körülírt kör sugara:	a) 10 cm; b) 6 cm; c) 4 cm; d) 12 cm.
5.	A derékszögű háromszög oldalai 6 cm, 8 cm és 10 cm. A beírt körvonal sugara:	a) 4 cm; b) 8 cm; c) 12 cm; d) 2 cm.
6.	Az A pontból a körvonalhoz húzott érintők hossza: AB és AC (B és C – érintési pontok). Igaz, hogy:	a) $AB = AC$; b) $AB < AC$; c) $AB > AC$; d) $AB \neq AC$.
7.	A 3 cm és 7 cm sugarú körvonalak kívülről érintik egymást. A két körvonal középpontja között a távolság:	a) 2 cm; b) 4 cm; c) 10 cm; d) 5 cm.
8.	A 3 cm és 5 cm sugarú koncentrikus körvonalak által alkotott körgyűrű szélessége:	a) 8 cm; b) 2 cm; c) 4 cm; d) 4π cm.
9.	Az O középpontú körvonalhoz az A pontból húzott érintő AB hosszú (B – érintési pont). Az $ABO\angle$:	a) hegyesszög; b) derékszög; c) tompaszög; d) egyenesszög.
10.	Azoknak a pontoknak mértani helye, melyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól:	a) a körvonal; b) a négyzet; c) a körlap; d) a kocka.

Ellenőrző dolgozat típusfeladatai

1°. Rajzoljatok 5 cm átmérőjű körvonalat! Mivel egyenlő a körvonal sugara?

2°. Van-e közös pontja a 2 cm és 5 cm sugarú körvonalaknak, ha középpontjaik között a távolság 8 cm?

3°. Határozzátok meg a szög mértékét, amely alatt a körvonal középpontjából látható a beírt egyenlő oldalú háromszög oldala!

4°. Szerkesszetek adott szakasznál háromszor nagyobb szakaszt!

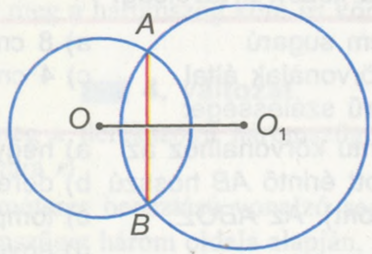
5•. A körvonal két sugara közötti szög fokmértéke 130°. Határozzátok meg a sugarak végpontjaiba húzott érintők közötti szöget!

6•. Két körvonal külső érintésű, középpontjaik között a távolság 16 cm. Határozzátok meg a körvonalak sugarát, ha úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 5!

7•. Az ABC háromszög köré – melynek két szöge 30° és 60° – körvonal van írva. Határozzátok meg a körvonal sugarát, ha $AB = 10$ cm!

8•. Szerkesszetek derékszögű háromszöget, melynek átfogója $AC = 5$ cm, befogója $AB = 3$ cm! Rajzoljatok kört a háromszög köré!

9••. Bizonyítsátok be, ha két O és O_1 középpontú körvonal A és B pontokban metszi egymást, akkor $AB \perp OO_1$!



10••. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget szára (6 cm) és a szárhoz húzott súlyvonal (5 cm) alapján!

A 4. fejezet összefoglalása

A *körvonal* mértani helye egy adott ponttól egyenlő távolságra fekvő pontoknak. A *körlap* a síknak körvonallal határolt része. Azt az egyenest, melynek csak egy közös pontja van a vele egy síkban fekvő körvonallal, a körvonal *érintőjének* nevezzük. A körvonal *húrja* olyan szakasz, melynek végpontjai a körvonalhoz tartoznak. A körvonal legnagyobb húrja az *átmérő*.

Az átmérőtől különböző húr középpontján átmenő átmérő merőleges a húrra.

A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

Azt a körvonalat, amelyik átmegy a háromszög mindegyik csúcsán, a *háromszög köré írt körvonalnak* nevezzük. Azt a körvonalat, amelyik érinti a háromszög mindegyik oldalát, a *háromszögbe írt körvonalnak* nevezzük. Minden háromszög köré, és minden háromszögbe írható körvonal. A háromszögbe írt körvonal középpontja a szögfelezők metszéspontja. A háromszög köré írt körvonal középpontja a háromszög oldalai felező merőlegeseinek metszéspontja.

A *szakasz felező merőlegese* – a szakasz felezőpontján átmenő egyenes.

Vonalzó és körző segítségével szerkeszthetünk háromszöget adott három oldala alapján, megszerkeszthetjük a szög szögfelezőjét, a szakasz felezőpontját, adott egyenesre merőleges egyenest stb.

A *szerkesztési feladatok* a mértani feladatok legfontosabbjai közé tartoznak. A szerkesztési feladatokat leggyakrabban a *mértani helyek módszerével* oldják meg.

Pontok mértani helye – meghatározott tulajdonságú pontok halmaza.

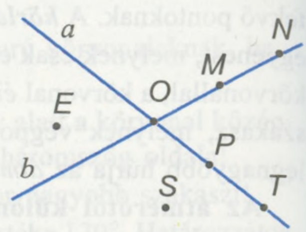
A szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a szakasz felező merőlegese (egy síkban fekvő alakzatok esetében).

A szög száraitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a szög felezője.

ISMÉTLŐ FELADATOK

1. §-hoz

647. A 250. ábra alapján mondjátok meg:
a) melyik pontban metszik egymást az *a* és *b* egyenesek;
b) mely pontok tartoznak az *a*, melyek a *b* egyeneshez;
c) mely pontok nem tartoznak sem az *a*, sem a *b* egyeneshez;
d) hozzátartozik-e az *O* pont az *a* egyeneshez, a *b* egyeneshez!



250. ábra

648. Az *A*, *B* és *C* pontok az *a* egyenesre illeszkednek, az *M*, *N*, *K* pontok pedig nem. Készítsetek rajzot!

649. $M \in a$, $N \notin a$, $K \notin a$, az *N* és a *K* az *a* egyenes különböző oldalán fekszik. Készítsetek rajzot!

650. Az *a* egyenesen adott az *A* és *B* pont. Készítsetek olyan rajzot, amelyen az *M* és *N* pontok az *A* és *B* pontok között fekszik, a *B* pont pedig az *M* és *N* pontok között!

651. Rajzoljatok:
a) három, egymást egy pontban metsző egyenest;
b) három egyenest, melyek közül kettő nem metszi egymást;
c) három egyenest, melyek páronként metszik egymást három pontban!
Hány részre osztják a síkot az egyenesek mindegyik esetben?

2. §-hoz

652. *M* – az *AB* szakasz egy pontja. Határozzátok meg az *AB* szakasz hosszát, ha $BM = 5$ cm és:
a) *AM* 2 cm-rel nagyobb, mint *BM*;
b) *AM* 3-szor nagyobb *BM*-nél;
c) $AM : BM = 3 : 2$;
d) $AB = 3AM$!

653. Az *A*, *B* és *C* pontok egy egyenesen fekszenek. *AB* 3-szor kisebb, mint *BC*. Határozzátok meg az *AB* és *BC* hosszát, ha $AC = 8$ cm! Hány megoldása van a feladatnak?

654. Az *A*, *B*, *C* és *D* pontok egy egyenesen fekszenek. $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 7$ cm. Mivel egyenlő *AD* ? Vizsgáljatok meg minden lehetséges esetet!

655. A C pont az AB szakasz, a D pont pedig az AC szakasz felezőpontja. Határozzátok meg az $AD : AB$, $AD : BC$, $BC : DC$ arányokat!

656. A C pont az AB szakasz, a D pont pedig a CB szakasz felezőpontja. Határozzátok meg az AB szakaszt, ha:
a) $CD = 2$ cm; $BC - CD = 3$ cm; $AC - DC = 4$ cm!

657. Az M pont az AB szakaszon fekszik. A K és P pontok megfelelően az AM és MB szakaszok felezőpontjai. Határozzátok meg KP-t, ha $AB = 10$ cm!

658. Az M pont az AB szakasz felezőpontja, a K pont az AM szakaszt $AK : KM = 1 : 2$ arányban osztja. Határozzátok meg MK-t, ha:
a) $AB = 12$ cm; b) $BM = 9$ cm; c) $MB - AK = 10$ cm!

659. Az A, B és C pontok az a egyenesen fekszenek. $AB = 12$ cm, $AC + CB = 15$ cm. Határozzátok meg az AC és BC szakaszok hosszát!

660. Az A, B és C pontok egy egyenesen fekszenek. $BC = 6$ cm, $AB + AC = 10$ cm. Határozzátok meg AB-t és AC-t!

661. $AB = 10$ cm. A C pont az AB felezőpontja. Az AB egyenesen keressetek meg minden olyan D pontot, hogy igaz legyen: $DA + DB + DC = 12$ cm. Készítsetek rajzot!

662. Az A és B pont az a egyenes ellentétes oldalán fekszik, $M \in a$. $AM = 10$ cm, $BM = 15$ cm, $AB = 23$ cm. Metszéspontja-e az M pont az AB és a egyenesnek?

663. Egy vonalzón 3 cm-es és 7 cm-es beosztások vannak. Hogyan szerkeszthető ezzel a vonalzóval 4 cm és 11 cm hosszúságú szakasz?

3. §-hoz

664. Az OM félegyenes az $AOB\angle$ belső tartományában van. Határozzátok meg az $AOM\angle$ és a $BOM\angle$ mértékét, ha $AOB\angle = 80°$, és:
a) $AOM\angle$ 3-szor kisebb, mint $MOB\angle$;
b) $BOM\angle$ 20°-kal nagyobb, mint $AOM\angle$;
c) $AOM\angle : BOM\angle = 1 : 3$;
d) $BOM\angle = AOM\angle$!

665. A derékszöget két belső félegyenessel három részre osztották. Ezek közül az egyik 20°-kal nagyobb a másodiknál, és 20°-kal kisebb a harmadiknál. Határozzátok meg a szögek fokmértékét!

666. Az $AOB\angle$ felezője OC, OM az $AOC\angle$ felezője. Határozzátok meg az AOB szöget, ha $MOC\angle = 20°$!

667. $AOB\angle = 80°$, $BOC\angle = 20°$, OM az $AOC\angle$ felezője. Határozzátok meg az $MOC\angle$ mértékét! Vizsgáljatok meg minden lehetséges esetet!

668. Az $AOB\angle$ felezője OC, OM – az $AOC\angle$ belső félegyenese, $AOM\angle : MOC\angle = 1 : 3$. Határozzátok meg az $AOM\angle$-et és az $AOB\angle$-et, ha $MOC\angle = 60°$!

669. Az egyenesszög egy félegyenessel úgy van két részre osztva, hogy az egyik rész fele a másik résznek a harmada. Határozzátok meg ezeket a szögeket!

670*. Az $AOB\angle$ felezője OC, az M pont az $AOC\angle$ belső pontja. Bizonyítsátok be, hogy $MOC\angle$ a BOM és AOM szögek félkülönbségével egyenlő!

671*. OC – az $AOB\angle$ szögfelezője, OA – az $MOC\angle$ szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy $MOC\angle$ az AOM és BOM szögek félösszegével egyenlő!

672. Van egy 50°-os szögellőnk. Hogyan lehet segítségével 100°-os, 80°os, 160°-os szögeket szerkeszteni?

4. §-hoz

673. $AOB\angle$ és $BOC\angle$ mellékszögek. Határozzátok meg $AOB\angle$ mértékét, ha:
a) $BOC\angle = 50°$;
b) $BOC\angle$ 20°-kal nagyobb AOB szögnél;
c) $BOC\angle$ negyedrésze az AOB szögnek;
d) $AOB\angle : BOC\angle = 3 : 2$;
e) $AOB\angle - BOC\angle = 30°$!

674. Két egyenes metszése által alkotott szögek egyike 35°25′. Határozzátok meg a többi szöget!

675. Két egyenes metszése által alkotott szögek egyike kétszer nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a szögek fokmértékét!

676. Az AB és CD egyenesek az O pontban metszik egymást, és $AOC\angle = 130°$. Határozzátok meg az alábbi szögek szögfelezői közötti szöget:
a) $COB\angle$ és $BOD\angle$; b) $COB\angle$ és $AOD\angle$!

677. Az AB és CD egyenesek az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy a BOC és AOC szögek szögfelezői merőlegesek!

678. Az AB és CD egyenesek az O pontban metszik egymást. OE a $BOD\angle$ szögfelezője, $DOE\angle = 55°$. Határozzátok meg az AOC és COB szögeket!

679. Az $AOB\angle$ és $BOC\angle$ mellékszögek, OE a $BOC\angle$ szögfelezője, $EOC\angle = 45°$. Bizonyítsátok be, hogy $OB \perp AC$!

680. Két egyenes metszésekor keletkező szögek egyike 9-szer kisebb a másik három összegénél. Határozzátok meg a szögeket!

681. Két egyenes metszésekor keletkező szögek egyike 4-szer nagyobb a vele mellékszöget alkotó két szög összegénél. Határozzátok meg a szögeket!

5. §-hoz

682. Szögmérővel rajzoljatok $AOB\angle = 70°$ nagyságú szöget! Az $AOB\angle$ belső tartományában felvett M pontból állítsatok merőlegest a szög száraira!

683. Szögmérővel rajzoljatok $AOB\angle = 120°$ nagyságú szöget! Az $AOB\angle$ belső tartományába tartozó M pontból rajzoljatok párhuzamosokat a szög száraival!

684. Az $ABCD$ négyzet területe 16 cm². Határozzátok meg az A pont távolságát a BC és CD oldalaktól!

685. Az $ABCD$ téglalap kerülete 20 cm. Az AB oldal 2 cm-rel kisebb a BC oldalnál. Szerkesszétek meg ezt a téglalapot, és határozzátok meg az A pont távolságát a BC és CD oldalaktól!

686. Az $AOB\angle$ és a $BOC\angle$ mellékszögek. Merőlegesek-e az OM és ON egyenesek (M – az $AOB\angle$, N – a $BOC\angle$ belső pontja), ha:

a) $BOC\angle = 50°$, ON – a $BOC\angle$ felezője, $AOM\angle = 70°$;

b) $AOB\angle : BOC\angle = 2 : 1$, $MOB\angle = \frac{1}{3}AOB\angle$, $CON\angle = 10°$;

c) $AOB\angle - BOC\angle = 20°$, $MOB\angle = NOC\angle = 40°$;

d) $DOC\angle = \frac{2}{3}AOB\angle$, $NOC\angle : NOB\angle = 1 : 2$, $AOM\angle - BOM\angle = 24°$?

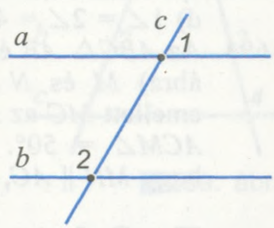
6. §-hoz

687. Párhuzamosak-e az a és b egyenesek (251. ábra), ha:

a) $1\angle = 40°$, $2\angle = 140°$;

b) $1\angle$ harmadrésze a $2\angle$-nek és $2\angle$ 90°-kal nagyobb, mint $1\angle$;

c) $1\angle : 2\angle = 1 : 4$, és $1\angle$ 108°-kal kisebb, mint $2\angle$?



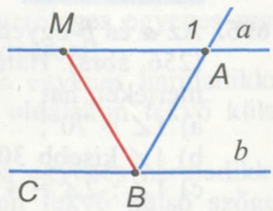
251. ábra

688. Az $ABC\angle$ felezője BM (252. ábra). Párhuzamosak-e az a és b egyenesek, ha:

a) $1\angle = 160°$, $ABM\angle = 80°$;

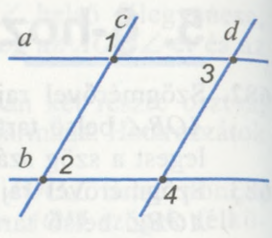
b) $CBM\angle = 50°$, $1\angle = 120°$;

c) az $ABM\angle$ fele a $1\angle$-nek?



252. ábra

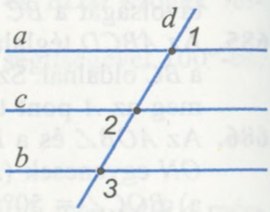
689. Írjátok fel a párhuzamos egyeneseket (253. ábra), ha:
a) $1\angle = 120°$, $2\angle = 70°$, $3\angle = 60°$;
b) $1\angle = 120°$, $3\angle = 80°$, $4\angle = 100°$;
c) $2\angle = 60°$, $3\angle = 80°$, $4\angle = 120°$;
d) $3\angle = 2\angle = 60°$, $4\angle = 120°$!



253. ábra

690. Bizonyítsátok be, hogy a négyzet szemben fekvő oldalai párhuzamos egyeneseken fekszenek!

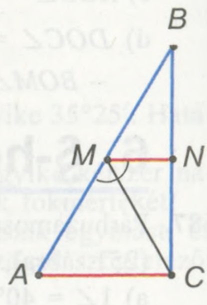
691. Az $ABCD$ négyszögben $BAD\angle$ fele az $ABC\angle$-nek, az $ABC\angle$ $60°$-kal nagyobb, mint $BAD\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $BC \parallel AD$!



254. ábra

692. Az $ABCD$ négyszögben a BD egyenes felezi az ABC és ADC szögeket. Párhuzamosak-e a négyszög szemben fekvő oldalai, ha:
a) $ABC\angle = 140°$, $BDC\angle = 70°$;
b) $ABC\angle = ADC\angle$?

693. Írjátok fel a párhuzamos egyeneseket (254. ábra), ha:
a) $1\angle = 70°$, $2\angle = 80°$, $3\angle = 110°$;
b) $1\angle = 60°$, $2\angle = 60°$, $3\angle = 100°$;
c) $1\angle = 50°$, $2\angle = 80°$, $3\angle = 100°$;
d) $1\angle = 2\angle = 40°$, $3\angle = 140°$!

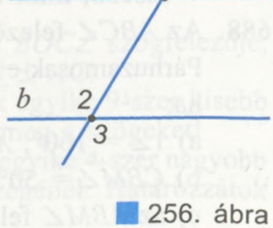


255. ábra

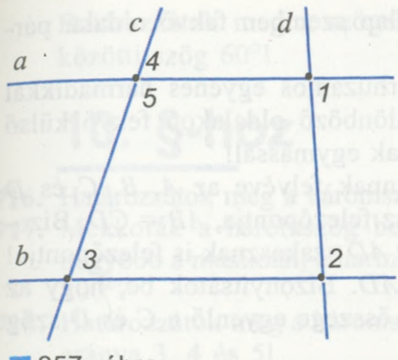
694. Az $ABC\triangle$ AB és BC oldalain (255. ábra) M és N pontok fekszenek, emellett MC az AMN szög felezője, $ACM\angle = 50°$. Bizonyítsátok be, hogy $MN \parallel AC$, ha $BMN\angle = 80°$!

7. §-hoz

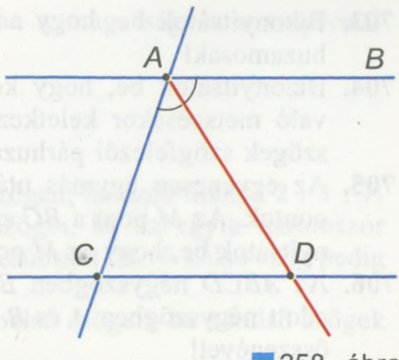
695. Az a és b egyenesek párhuzamosak (256. ábra). Határozzátok meg a $3\angle$ mértékét, ha:
a) $1\angle = 70°$;
b) $1\angle$ kisebb $30°$-kal $2\angle$-nél;
c) $1\angle : 2\angle = 4 : 5$;
d) $1\angle$ a $2\angle$ $\frac{3}{5}$ része!



256. ábra



257. ábra



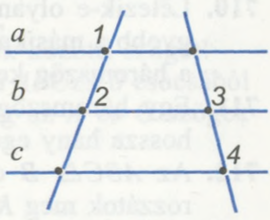
258. ábra

696. Oldjátok meg a feladatokat a 257. ábra felhasználásával:
a) $1\angle = 80^\circ$, $2\angle = 100^\circ$, $3\angle = 60^\circ$. Kiszámítani $4\angle$;
b) $4\angle = 3\angle$, $2\angle = 2\ 1\angle$. Kiszámítani $1\angle$ és $2\angle$;
c) $1\angle = 55^\circ$, $2\angle = 125^\circ$, $5\angle : 3\angle = 3 : 1$. Kiszámítani $4\angle$;
d) $3\angle = 70^\circ$, $5\angle = 110^\circ$, $2\angle - 1\angle = 70^\circ$. Kiszámítani $1\angle$ és $2\angle$.

697. Az $AB \parallel CD$-vel, AD a $CAB\angle$ felezője (258. ábra), $ADC\angle = 50^\circ$. Határozzátok meg az $ACD\angle$ mértékét!

698. Az $ABC\triangle$ AB és BC oldalán úgy van felvéve egy M és N pont, hogy $MN \parallel AC$ (255. ábra). $ACM\angle = 65^\circ$, MC az $AMN\angle$ felezője. Határozzátok meg a $BMN\angle$ és a $BAC\angle$ mértékét!

699. Párhuzamosak-e az a és b egyenesek (259. ábra), ha:
a) $\angle + 2\angle = 180^\circ$, $3\angle = 4\angle$;
b) $2\angle = 50^\circ$, $3\angle = 100^\circ$, $4\angle = 100^\circ$, $1\angle - 4\angle = 30^\circ$;
c) $2\angle : 3\angle = 1 : 2$, $3\angle - 2\angle = 60^\circ$, $1\angle = 3\angle$, $4\angle = 130^\circ$?



259. ábra

8. §-hoz

700. Bizonyítsátok be, hogy két egymásra merőleges egyenes metszésekor keletkező szögek egyenlők egymással!

701. Bizonyítsátok be, hogy két párhuzamos egyenes harmadikkal való metszésekor keletkező különböző oldalakon fekvő külső szögek egyenlők egymással!

702. Bizonyítsátok be, hogy két párhuzamos egyenes harmadikkal való metszésekor keletkező egy oldalon fekvő külső szögek összege 180°!

703. Bizonyítsátok be, hogy a téglalap szemben fekvő oldalai párhuzamosak!

704. Bizonyítsátok be, hogy két párhuzamos egyenes harmadikkal való metszésekor keletkező különböző oldalakon fekvő külső szögek szögfelezői párhuzamosak egymással!

705. Az egyenesen egymás után vannak felvéve az A, B, C és D pontok. Az M pont a BC szakasz felezőpontja, $AB = CD$. Bizonyítsátok be, hogy az M pont az AD szakasznak is felezőpontja!

706. Az $ABCD$ négyszögben $BC \parallel AD$. Bizonyítsátok be, hogy az adott négyszögben A és B szög összege egyenlő a C és D szög összegével!

707. Az $ABC\triangle$-ben $P \in AB$, $K \in BC$, $PK \parallel AC$. Bizonyítsátok be, hogy az $ABC\triangle$ szögei egyenlők a $PBK\triangle$ szögeivel!

708. A sík egy pontján keresztül 4 egyenes halad át. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett szögek közül legalább egy kisebb, mint 47°!

9. §-hoz

709. Számítsátok ki a háromszög kerületét, ha egyik oldala 5 cm, a másik 3 cm-rel nagyobb, a harmadik a másik kettő összegénél 3 cm-rel kisebb!

710. Létezik-e olyan háromszög, melynek egyik oldala kétszer nagyobb a másiknál, a harmadik 3 cm-rel kisebb a másodiknál, és a háromszög kerülete 11 cm?

711. Egy háromszög két oldala 2 cm és 3 cm. A harmadik oldal hossza hány egész számú centiméter lehet?

712. Az $ABC\triangle$ B csúcsából meghúzták a BK magasságot. Határozzátok meg KC-t, ha $AC = 10$ cm, $AK = 3$ cm! Vizsgáljatok meg két lehetőséget, ha: a) $A\angle$ hegyesszög; b) $A\angle$ tompaszög!

713. Az $ABC\triangle$ B csúcsából meghúzták a BK magasságot. $AK : KC = 3 : 5$, $AC = 16$ cm. Határozzátok meg AK-t és KC-t, ha: a) $A\angle$ hegyesszög; b) $A\angle$ tompaszög!

714. A derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából meghúzott magasság és súlyvonal a derékszöget három egyenlő részre osztja. Határozzátok meg a derékszög szögfelezője és a magasság közötti szöget!

715. Az $ABC\triangle$ B tompaszögének csúcsából meghúzták a magasságot, a szögfelezőt és a súlyvonalat. A szögfelező és a magasság közötti szög kétszer nagyobb a szögfelező és a súlyvonal közötti szögnél.

Határozzátok meg a szögeket, ha a magasság és a súlyvonal közötti szög 60°!

10. §-hoz

716. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha azok aránya 2 : 3 : 7!
717. Mekkorák a háromszög belső szögei, ha az egyik háromszor nagyobb a másiknál, a harmadik csúcsnál fekvő külső szög pedig 100°?
718. Határozzátok meg a háromszög belső szögeit, ha a külső szögek aránya 3, 4 és 5!
719. A derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából húzott magasság és szögfelező közötti szög mértéke 20°. Határozzátok meg a háromszög hegyesszögeit!
720. Az ABC derékszögű háromszögben ($C\angle = 90°$) meghúzták a CH magasságot. Bizonyítsátok be, hogy $HCB\angle = CAB\angle$!
721. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit, ha $B\angle = 100°$, a BK szögfelező pedig egyúttal magasság is!
722. A háromszög egyik szöge 20°-kal nagyobb a másodiknál, és 50°-kal kisebb a harmadiknál. Határozzátok meg a háromszög kisebb szögeinek felezői által bezárt szöget!
723. Az $ABC\triangle$-ben $A\angle = 70°$, $B\angle = 30°$. Határozzátok meg:
a) az A és C szögek felezői közötti szöget;
b) az A és C csúcsokból húzott magasságok közötti szöget!
724*. Bizonyítsátok be, hogy a nem egyenlő szárú $ABC\triangle$ B csúcsából húzott magasság és szögfelező közötti szög az A és C szögek különbségének felével egyenlő!

11. §-hoz

725. Az M pont az AB szakaszt 5 cm és 7 cm hosszú szakaszra osztja. Milyen szakaszokra osztja az N pont a CD szakaszt, ha $CD = AB$ és $CN : ND = 1 : 5$?
726. Az $AOB\angle = COD\angle$, OM a $COD\angle$ belső félegyenese, $COM\angle : MOD\angle = 2 : 3$, és $MOD\angle - COM\angle = 30°$. Határozzátok meg az $AOB\angle$-et!
727. $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. $A\angle = 70°$, $B\angle = 50°$. Határozzátok meg a $C_1\angle$-et!
728. $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. $AC = 7$ cm, $AB - BC = 2$ cm. Határozzátok meg az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalait, ha kerülete 21 cm!

729. Egyenlők-e az $ABC\triangle$ és $A_1B_1C_1\triangle$ szögei, ha $A\angle = 70°$, $C\angle = 80°$, és az $A_1B_1C_1\triangle$ szögei arányosak a 7, 5 és 8 számokkal?

730. Egyenlők-e az $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ négyzetek, ha az $ABCD$ négyzet kerülete 20 cm, az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet területe pedig: a) 36 cm²; b) 25 cm²?

731. Az egyik körvonal sugara 5 cm, a másik körvonal kerülete 10π cm. Egyenlők-e ezek a körvonalak?

732. Egy körvonal hossza 14π cm, egy másik körvonal által határolt körlap területe 64π cm². Egyenlők-e ezek a körvonalak?

12. §-hoz

733. Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást. $AD \parallel CB$ és $AD = CB$. Bizonyítsátok be, hogy $AOD\triangle = COB\triangle$!

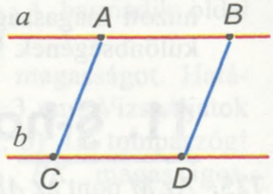
734. Az AB és CD egyenlő szakaszok úgy metszik egymást, hogy $ABC\angle = BCD\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $AC = BD$!

735. Adott egy AB szakasz, valamint olyan C és D pontok, hogy $ACB\angle = ADB\angle$, és $CAB\angle = ABD\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $AC = BD$. Vizsgáljátok meg azt az esetet, amikor a C és D pont egy félsíkban fekszik az AB egyeneshez viszonyítva, és amikor különböző félsíkokban fekszenek!

736. Az a és b párhuzamos egyeneseken a 260. ábrán látható módon felvették az A, B, C és D pontokat. $AB = CD$. Bizonyítsátok be, hogy $AC \parallel BD$!

737. Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást. $AO = CO$, $BO = DO$. Bizonyítsátok be, hogy $OBD\angle = ODB\angle$!

738. Az O középpontú körben megrajzolták az AB és CD átmérőket. Bizonyítsátok be, hogy $AC = BD$ és $AC \parallel BD$!



260. ábra

739. Az O középpontú körvonalon az AD átmérő egy oldalán úgy vették fel a B és C pontokat, hogy $AOB\angle = COD\angle$. Bizonyítsátok be, hogy $BD = AC$!

740. A CD az $ABC\triangle$ súlyvonala, C_1D_1 pedig az $A_1B_1C_1\triangle$ súlyvonala. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$, ha $ADC\triangle = A_1D_1C_1\triangle$!

741. $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. Bizonyítsátok be, hogy a B és B_1 csúcsokból húzott szögfelezők egyenlők egymással!

742. $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. Bizonyítsátok be, hogy az A és A_1 csúcsokból húzott magasságok egyenlők egymással!

743. $ABC\triangle = A_1B_1C_1\triangle$. Bizonyítsátok be, hogy a B és B_1 csúcsokból húzott súlyvonalak egyenlők egymással!

13. §-hoz

744. Az egyenlő szárú háromszög egyik szöge 110°-os. Számítsátok ki a többi szög fokmértékét!

745. Az egyenlő szárú háromszög egyik szöge 80°-os. Számítsátok ki a többi szög fokmértékét! Hány megoldása van a feladatnak?

746. Az egyenlő szárú háromszög egyik oldala 3 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha kerülete 21 cm! Vizsgáljatok meg minden lehetséges változatot!

747. Az ABC egyenlő szárú háromszög AC alapján úgy vették fel az M és N pontokat, hogy $AM = CN$. Bizonyítsátok be, hogy az $MBN\triangle$ egyenlő szárú!

748. Az egyenlő szárú háromszög egyik szöge 100°-os. Milyen szögben metszik egymást:
a) az egyenlő szögfelezők;
b) az egyenlő magasságok meghosszabbításai?

749. Az $ABC\triangle$ AM súlyvonala merőleges a BK szögfelezőre. Határozzátok meg BC-t, ha $AB = 10$ cm!

750. Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög száraira húzott súlyvonalak egyenlők egymással!

751. Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást. $AO = CO$, $BO = DO$, $AO \neq BO$. K – az AD és BC egyenesek metszéspontja. Bizonyítsátok be, hogy a $DKB\triangle$ egyenlő szárú! Vizsgáljátok meg az eseteket, ha:
a) $AO < BO$; b) $AO > BO$.

752. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a szárakhoz húzott szögfelezők által bezárt szög kétszer nagyobb a szárszögénél!

753. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha szárszöge egyenlő az alaphoz és a szárhoz húzott szögfelezők által alkotott szöggel!

754. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a B szárszög feleakkora, mint az alapon fekvő szög. AD – szögfelező, $D \in BC$. Bizonyítsátok be, hogy a $CAD\triangle$ és $ADB\triangle$ egyenlő szárúak!

14. §-hoz

755. Adott AB szakasz, valamint az AB egyenesen kívül fekvő C és D pont. $AC = BD$ és $AD = BC$. Bizonyítsátok be, hogy $ACB\triangle = BDA\triangle$! Vizsgáljatok meg a C és D pont elhelyezkedésének különböző eseteit!

756. Az $ABCD$ négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők egymással. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\triangle = CDA\triangle$!

757. Az $ABCD$ négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők egymással. Bizonyítsátok be, hogy a szemben fekvő oldalak párhuzamosak!

758. Az AB és CD szakasz az O pontban metszi egymást. $AO = CO$, $BO = DO$. Bizonyítsátok be, hogy $ADB\triangle = CBD\triangle$!

759. Az AC alapú ABC egyenlő szárú háromszög belső tartományában lévő D pont olyan, hogy $AD = CD$. Bizonyítsátok be, hogy $ADB\angle = CDB\angle$!

760. A C és D pont az AB egyenes különböző oldalain fekszik, $AC = AD$ és $BC = BD$. Bizonyítsátok be, hogy AB a $CAD\angle$ felezője!

761. Az ACB és ADB háromszögek közös oldala AB, $AC = AD$, $BC = BD$. Bizonyítsátok be, hogy $AB \perp CD$!

762. A C és D pont az AB egyenes azonos oldalán fekszik, $AC = BD$, $AD = CB$. Bizonyítsátok be, hogy az $AOB\triangle$ egyenlő szárú, ha az O pont az AD és BC szakasz metszéspontja!

763. A C és D pont az AB egyenes azonos oldalán fekszik, $AC = BD$, $AD = CB$. Bizonyítsátok be, hogy az $AKB\triangle$ egyenlő szárú, ha a K pont az AC és BD szakasz metszéspontja!

15. §-hoz

764. Határozzátok meg a derékszögű háromszög hegyesszögeit, ha az egyik közülük négyszer nagyobb a másiknál!

765. Egy háromszög szögeinek aránya 1, 2 és 3. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög derékszögű!

766. A háromszög egyik szöge a másik kettő összegével egyenlő. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög derékszögű!

767. A derékszögű háromszög egyik befogója 7 cm-rel nagyobb a másik befogónál, és 1 cm-rel kisebb az átfogónál. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha kerülete 30 cm!

768. A háromszög súlyvonala annak az oldalnak a felével egyenlő, amelyikhez húzva van. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög derékszögű!

769. Határozzátok meg a derékszögű háromszög kisebbik befogóját, ha átfogója 10 cm, és az egyik szög fokmértéke 30°!

770. A derékszögű háromszög átfogója 12 cm, egyik szöge pedig 30°. Határozzátok meg azoknak a szakaszoknak a hosszát, amelyekre a derékszög csúcsából bocsátott magasság osztja az átfogót!

771. Az $ABC\triangle$-ben $C\angle = 90°$, $B\angle = 60°$ BP – szögfelező, $BP = 5$ cm. Számítsátok ki az AC hosszát!

772. Az $ABC\triangle$-ben $C\angle = 90°$, $A\angle = 30°$, $CK \perp AB$, $K \in AB$. Számítsátok ki a K pont távolságát BC-től, ha $AC = 8$ cm!

773. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Határozzátok meg a derékszög csúcsából húzott magasságot!

774. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóinak hossza 10 cm, CK – a derékszög csúcsából húzott magasság. Határozzátok meg a K pont távolságát a befogóktól!

775. Az $ABCD$ négyzet oldalainak felezőpontjai M, N, P és K. Bizonyítsátok be, hogy az $MNPK$ négyzet!

16. §-hoz

776. Az $ABC\triangle$-ben $A\angle = 70°$, $B\angle = 80°$. Melyik a háromszög legnagyobb és legkisebb oldala?

777. Az $ABC\triangle$-ben $AB : 2 = BC : 3 = AC : 7$. Melyik a háromszög legnagyobb és legkisebb szöge?

778. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög legnagyobb oldala szemben fekszik a legkisebb külső szöggel!

779. Az $ABC\triangle$ AC oldalán úgy vettek fel egy K pontot, hogy $AB = KB$. Bizonyítsátok be, hogy $A\angle > C\angle$!

780. Az $ABC\triangle$ BK magassága az AC oldalt $AK : KC = 1 : 3$ arányban osztja. Hasonlítsátok össze az A és C szögeket!

781. Az egyenlő szárú háromszög két oldala 3 cm és 6 cm. Határozzátok meg a harmadik oldalt!

782. Az egyenlő szárú háromszög egyik oldala 39 cm, kerülete pedig 157 cm. Határozzátok meg a háromszög másik két oldalát!

783. Egy háromszög két oldala 3 cm és 10 cm. Milyen természetes számmal fejezhető ki a harmadik oldal?

784. A háromszög egyik oldala 0,6 cm, a másik háromszor nagyobb. Határozzátok meg a háromszög kerületét, ha a harmadik oldal hossza természetes számmal van kifejezve!

785. Az egyenlő szárú háromszög két oldala 5 cm és 2 cm. Kifejezhető-e természetes számmal az alapra bocsátott magasság?

786. Az egyenlő szárú háromszög szára 5 cm, alapja pedig 6 cm. Határozzátok meg az alapra bocsátott magasságot Pitagorasz tételének (118. oldal) felhasználásával!

17. §-hoz

787. Az O középpontú körvonal AB húrja a körvonal sugarával egyenlő. Határozzátok meg az AOB szög mértékét!

788. Határozzátok meg az r sugarú, O középpontú körvonal AB húrjának távolságát a középponttól, ha $AOB\angle = 120°$!

789. Az O középpontú körvonal AB és CD átmérői merőlegesek egymásra. Bizonyítsátok be, hogy $ACB\angle = 90°$!

790. Az O középpontú körvonal AB és CD húrjai közül melyik van távolabb a középponttól és miért, ha $AOB\angle = 90°$ és $COD\angle = 120°$?

791. Az AB és CD húrok párhuzamosak, és egyenlő távolságra vannak a középponttól. Bizonyítsátok be, hogy $AB = CD$!

792. Adott egy 3 cm és egy 5 cm sugarú körvonal. Hogyan helyezkednek el ezek a körvonalak egymáshoz viszonyítva, ha középpontjaik között a távolság:

a) 6 cm; b) 8 cm; c) 10 cm?

793. Két körvonal kívülről érinti egymást. Középpontjaik között a távolság 12 cm. Határozzátok meg a körvonalak sugarát, ha az egyik sugár 2 cm-rel nagyobb a másiknál!

794. Két körvonal belülről érinti egymást. Középpontjaik között a távolság 8 cm. Határozzátok meg a körvonalak sugarát, ha az egyik sugár háromszor kisebb a másiknál!

795. Három, O_1, O_2 és O_3 sugarú kör páronként érinti egymást kívülről. Határozzátok meg a körvonalak sugarát, ha azok nagysága a 2, 3 és 4 számokkal arányos, az $O_1O_2O_3\triangle$ kerülete pedig 36 cm!

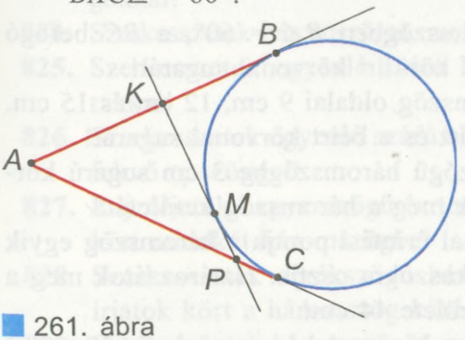
796. Az A külső pontból a körvonalhoz AB és AC érintőt húztak, a KP egyenes pedig az M pontban érinti a körvonalat (261. ábra). Határozzátok meg AB-t és AC-t, ha az $AKP\triangle$ kerülete 36 cm!

797. Az A pontból az O középpontú körvonalhoz AB és AC érintőt húztak. $BOC\angle = 120°$, $AB = 7$ cm. Határozzátok meg az $ABC\triangle$ kerületét!

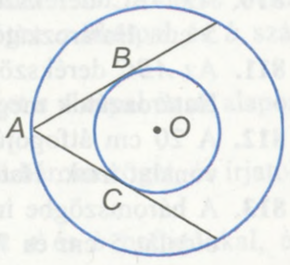
798. Határozzátok meg a 10 cm és 7 cm sugarú koncentrikus körök által alkotott körgyűrű AB szélességét!

799. Határozzátok meg két koncentrikus kör sugarát, ha a sugarak úgy aránylanak, mint 2 : 5, az általuk alkotott körgyűrű szélessége pedig 9 cm!

800. Adott két koncentrikus körvonal. A 10 cm sugarú körvonal A pontjából a kisebb sugarú körvonalhoz AB és AC érintőt húztak (262. ábra). Határozzátok meg a kisebbik körvonal sugarát, ha $BAC\angle = 60°$!



261. ábra



262. ábra

18. §-hoz

801. Határozzátok meg az O középpontú körvonal AB húrjának végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

802. Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

803. Határozzátok meg az egyenlő oldalú háromszög csúcsaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

804. Határozzátok meg az egyenlő oldalú háromszög oldalaitól egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

805. Határozzátok meg két egymást metsző egyenestől egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helyét!

806. Határozzátok meg a két párhuzamos egyenest érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét!

807. Adott egy O középpontú, r sugarú körvonal. Határozzátok meg az O középponttól $2r$ távolságra fekvő pontok mértani helyét!

808. Adott egy 10 cm sugarú körvonal. Határozzátok meg a körvonalat érintő 3 cm sugarú körvonalak középpontjainak mértani helyét, ha: a) a körvonalak kívülről érintik egymást; b) a körvonalak belülről érintik egymást!

809. Adott két egyenlő sugarú, kívülről érintkező körvonal. Bizonyítsátok be, hogy a körvonalak középpontjától egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye a körvonalak érintési pontján áthaladó közös érintő!

19. §-hoz

810. Az ABC derékszögű háromszögben $B\angle = 60°$, a BC befogó 5 cm. Határozzátok meg a körülírt körvonal sugarát!

811. Az ABC derékszögű háromszög oldalai 9 cm, 12 cm és 15 cm. Határozzátok meg a körülírt és a beírt körvonal sugarát!

812. A 20 cm átfogójú derékszögű háromszögbe 3 cm sugarú körvonalat írtak. Határozzátok meg a háromszög kerületét!

813. A háromszögbe írt körvonal érintési pontja a háromszög egyik oldalát 5 cm és 7 cm szakaszokra osztja. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha kerülete 44 cm!

814. Az ABC háromszögben $AC = 15$ cm. A háromszögbe írt körvonal érintési pontja az AB oldalt az A csúcstól számolva 2 : 1 arányban osztja. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha kerülete 42 cm!

815. Egy háromszög oldalai 5 cm, 7 cm és 10 cm. Határozzátok meg azokat a szakaszokat, melyekre a beírt kör érintési pontja osztja a legnagyobb oldalt!

816. Az egyenlő szárú háromszög szára 8 cm, az alapon fekvő szöge pedig 30°-os. Határozzátok meg a körülírt körvonal sugarát!

817. A háromszög köré írt és a háromszögbe írt körvonalak középpontja azonos. Határozzátok meg a háromszög szögeit!

818. Az ABC háromszögbe körvonalat írtak, $BC = a$. Bizonyítsátok be, hogy a távolság az A ponttól a legközelebbi érintési pontig egyenlő $p - a$, ahol p a félkerület!

819. A derékszögű háromszögbe, melynek oldalai $AB = 10$ cm, $AC = 8$ cm és $BC = 6$ cm, körvonalat írtak. A BC oldallal párhuzamosan MN érintőt húztak a körvonalhoz ($M \in AB$, $N \in AC$). Határozzátok meg az $AMN\triangle$ kerületét!

820. Az ABC háromszög oldalai 7 cm, 9 cm és 10 cm. A két kisebb, AB és BC oldalakon úgy vették fel a P és K pontokat, hogy PK a beírt körvonal érintője. Határozzátok meg a $PBK\triangle$ kerületét!

20. §-hoz

821. Adott szakaszt osszatok fel 1 : 3 arányban!

822. Rajzoljatok derékszöget és szerkesszétek meg a szögfelezőjét!

823. Szerkesszetek derékszögű háromszöget 3 cm-es és 4 cm-es befogókkal!

824. Szerkesszetek háromszöget, melynek oldalai 5 cm, 7 cm és 9 cm!

825. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget a alappal és b szárakkal!

826. Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget a alappal és az alapon fekvő α szöggel!

827. Rajzoljatok hegyesszögű és tompaszögű háromszöget, és írjatok kört mindkét háromszögbe!

828. Szerkesszetek derékszögű háromszöget a és b befogókkal, és írjatok kört a háromszög köré!

829. Szerkesszetek háromszöget, melynek két oldala a és b, a köztük levő szög pedig 120°! Keressétek meg a körülírt körvonal középpontját, és rajzoljátok meg a körvonalat!

830. Két adott oldala és a közös csúcsnál fekvő külső szöge alapján szerkesszetek háromszöget!

831. Rajzoljatok egymással párhuzamos két egyenest, melyek között a távolság adott szakasszal egyenlő!

21. §-hoz

832. Szerkesszetek háromszöget, melynek kerülete 18 cm, oldalai pedig a 2, 3 és 4 számokkal arányosak!

833. Szerkesszetek téglalapot, melynek kerülete 20 cm, és különböző oldalainak aránya pedig 2 : 3!

834. Adva van a és c egymást metsző egyenes, valamint KP szakasz. Az a egyenesen jelöljétek meg azt a pontot, amely KP távolságra van a c egyenestől!

835. Szerkesszetek háromszöget két oldala és az egyik oldalra bocsátott magasság alapján!

836. Körző és vonalzó segítségével szerkesszetek szöget, melynek mértéke: a) 30°; b) 60°; c) 15°; d) 120°; e) 150°; f) 75°!

837. Szerkesszetek háromszöget két külső szöge, és a külső szögek csúcsát összekötő oldal alapján!

838. Adott körvonal köré szerkesszetek: a) négyzetet; b) egyenlő oldalú háromszöget!

839. Adott körvonalba írjatok: a) négyzetet; b) egyenlő oldalú háromszöget!

840. Adva van egy r sugarú körvonal. Szerkesszétek meg r hosszúságú húrjai felezőpontjainak mértani helyét!

841. Adva vannak az A, B és C pontok. Rajzoljatok az A ponton keresztül a B és C pontoktól egyenlő távolságra levő egyenest!

842. Rajzoljatok adott körvonal köré háromszöget két adott szöge alapján!

843. Rajzoljatok adott sugarú körvonalat, melynek érintője egy adott szög mindkét szára!

844. Rajzoljatok adott sugarú körvonalat, melynek érintője egy adott szög egyik szára, középpontja pedig a szög másik szárán van!

845. Rajzoljatok adott sugarú körvonalat, mely érint adott pontjában egy adott egyenest!

846. Szerkesszétek meg a pontok mértani helyét, amelyekből az adott körvonal: a) derékszög alatt látszik; b) 60°-os szög alatt látszik!

847. Rajzoljatok körvonalat, mely két koncentrikus körvonal mindegyikét érinti!

ÖSSZETETTEBB, NEHEZEBB FELADATOK

848. A Föld távolsága a Naptól körülbelül 149 500 ezer km, a Holdtól 400 ezer kilométer. Határozzátok meg a Hold – Nap távolságot:
a) napfogyatkozáskor;
b) holdfogyatkozáskor!

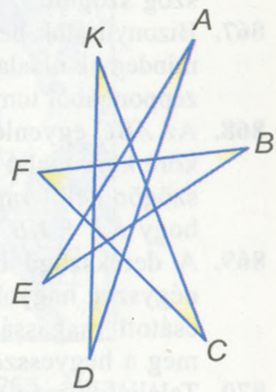
849. Az A, B és C pontok egy egyenesen fekszenek, a K, P és T pontok az AB, AC és BC szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy $KP = BT$!

850. A C pont az AB szakasz felezőpontja. Keressetek az AB szakaszon olyan X pontot, hogy igaz legyen az egyenlőség $XA = 1{,}5\,(XB + XC)$!

851. A mellékszögek egyike háromszor nagyobb a kettőjük különbségénél. Határozzátok meg a szögek fokmértékét!

852. Az A, B és C pontok úgy vannak elhelyezve a síkon, hogy $AB = BC = CA$ és $DA = DB = DC$. Határozzátok meg az ADB szög fokmértékét!

853. Határozzátok meg a hétágú csillag (263. ábra) A, B, C, D, E, F, K szögeinek összegét!



263. ábra

854. Az ABC háromszög belső tartományában felvettek egy tetszőleges X pontot. Bizonyítsátok be, hogy AXC szög nagyobb ABC szögnél!

855. Szerkesszetek adott hegyesszögnél 25%-kal nagyobb szöget!

856. Felezheti-e egy háromszög két magasságának metszéspontja mindkét magasságot?

857. Határozzátok meg a háromszög kerületét, ha a kerület az egyik oldalnál a-val, a másiknál b-vel, a harmadiknál c-vel nagyobb!

858. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög súlyvonalainak összege kisebb a kerületénél, de nagyobb a félkerületnél!

859. Bizonyítsátok be, hogy bármelyik háromszög felosztható néhány egyenlő szárú háromszögre!

860. Az AB és CD szakasz úgy metszi egymást az O pontban, hogy $AC = AO = BO = BD$. Bizonyítsátok be, hogy $OC = OD$!

861. A BB_1 szakasz szögfelező az ABC háromszögben. Bizonyítsátok be, hogy $AB > AB_1$ és $BC > B_1C$!

862. Bizonyítsátok be, hogy a hegyesszögű egyenlő szárú háromszög alapjának tetszőleges pontja és a szárak közötti távolságok összege állandó!

863. Az $ABC\triangle$-ben $AB = BC$, $B\angle = 20°$. Az AB oldalon felvett M pont olyan, hogy $BM = AC$. Határozzátok meg az ACM szöget!

864. A derékszögű háromszög hegyesszögei úgy aránylanak egymáshoz, mint 1 : 3. Bizonyítsátok be, hogy a derékszög szögfelezője egyenlő az egyik befogóval!

865. A derékszögű háromszög egyik hegyesszöge $n°$-kal nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a derékszög csúcsából húzott súlyvonal és magasság közötti szöget!

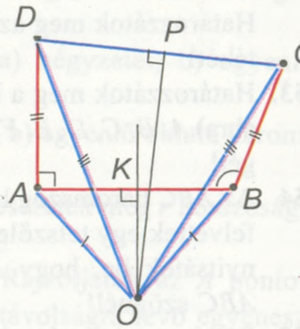
866. A háromszög egyik csúcsából húzott súlyvonal és magasság három egyenlő részre osztja a szöget. Határozzátok meg a háromszög szögeit!

867. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög mindegyik oldala a beírt körvonal középpontjából tompaszög alatt látszik!

868. Az ABC egyenlő oldalú háromszög köré körvonalat írtak. A K pont a C szögön belül van. Bizonyítsátok be, hogy $KA + KB = KC$!

869. A derékszögű háromszög átfogója négyszer nagyobb az átfogóra bocsátott magasságnál. Határozzátok meg a hegyesszögek fokmértékét!

870. Találjátok meg a hibát az alábbiakban!



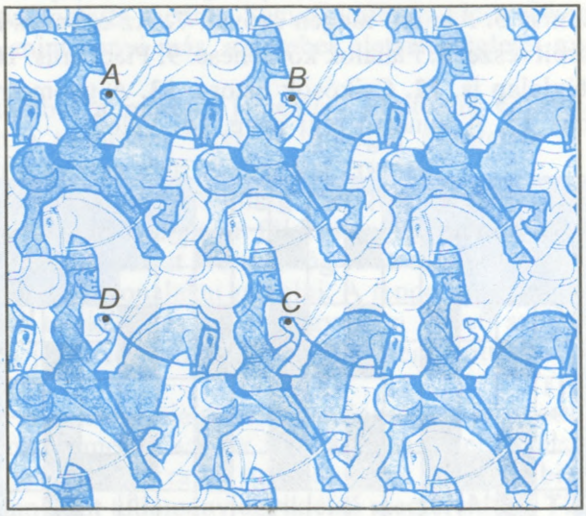
264. ábra

Bebizonyítjuk, hogy a derékszög egyenlő a tompaszöggel. Legyen adva ABC tompaszög és DAB derékszög (264. ábra). Felmérjük $AD = BC$, meghúzzuk a DC szakaszt, valamint az AB és CD szakaszok KO és PO felező merőlegesét. Ezek metszik egymást valamilyen O pontban, mert az AB és CD egyenesek nem párhuzamosak. Összekötve az O pontot az A, B, C és D pontokkal, OAD és OBC egybevágó háromszögeket kapunk (három oldaluk alapján). Tehát $OAD\angle = OBC\angle$. Az OAB és OBA szögek ugyancsak egyenlők. Ezért $DAB\angle = ABC\angle$, vagyis a derékszög egyenlő a tompaszöggel.

871. A derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója pedig c. Határozzátok meg a beírt körvonal átmérőjét!

872. Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adva van:
a) egyik befogója és a másik két oldal különbsége;
b) az átfogó és a két befogó különbsége!

873. A játéktáblán ábrázolt bábuk (265. ábra) alakzatok csúcspontjai. Határozzátok meg egy alakzat területét, ha az A, B, C és D pontok egy olyan négyszög csúcsai, melynek területe S!



265. ábra

874. Szerkesszetek háromszöget két szöge, és a velük szemben fekvő oldalak különbsége alapján!

875. Adva van egy tompaszögű háromszög. Rajzoljatok egyenest, amely olyan háromszöget vág le belőle, melynek két oldala és egy szöge egyenlő az adott háromszög két oldalával és egy szögével!

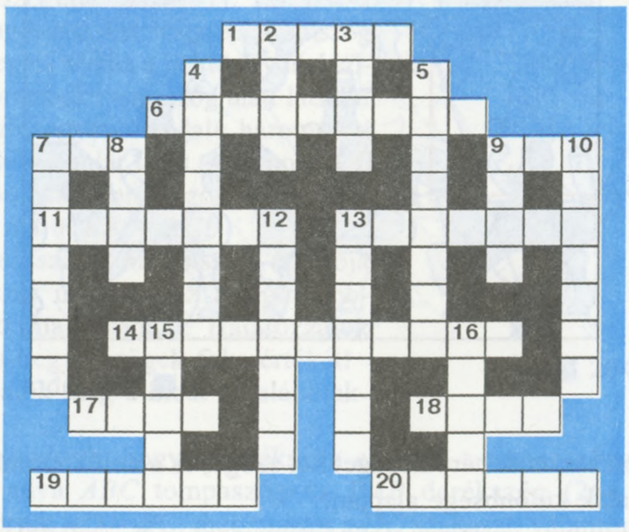
876. Rajzoljátok meg egy olyan szög szögfelezőjét, melynek csúcsa hozzáférhetetlen (a füzetlapon kívül van)!

877. Szerkesszetek háromszöget adott kerülete és két szöge alapján!

878. Fejtsétek meg a keresztrejtvényt (266. ábra)!

VÍZSZINTES: **1.** Bizonyítást igénylő állítás. **6.** A mértani alakzatokról szóló tudomány. **7.** Ragadozó madár. **9.** Török eredetű nép. **11.** Sarktételek. **13.** Rágcsáló rágószerve. **14.** A mértannak a síkfelületekkel foglalkozó ága. **17.** A tér legkisebb eleme. **18.** Becézett Mária. **19.** Napnak, körnek van. **20.** Egyenes, melynek a körvonallal egy közös pontja van.

FÜGGŐLEGES: **2.** Fémből készült pénzdarab. **3.** Napszak. **4.** Ukrán kerámia! **5.** Átmérő idegen szóval. **7.** Az egyenes két oldalról határolt része. **8.** Fiatalok köszönése. **9.** Piaci árus. **10.** Rombusz is, téglalap is. **12.** Csikósok ostora. **13.** A geometria alapvető eleme. **15.** A vonalzó régi neve. **16.** Valódi.



266. ábra

A mértan történetéből

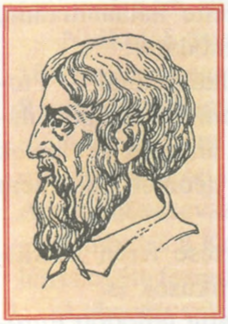
A mértan ősrégi tudomány. Egy ógörög történész még időszámításunk előtt az V. században írta: „A mértan sokak tanúsága szerint az egyiptomiak felfedezése, és a földmérésekkel kapcsolatban alakult ki. A földmérésre szükségük volt, mert áradásai nyomán a Nílus állandóan változtatta medrét. Semmi különös nincs abban, hogy ez a tudomány, mint annyi más, az ember életszükségletei nyomán keletkezett."

Egyiptomból a mértani ismeretek eljutottak Görögországba. Itt keletkezett a tudomány neve is (görögül *geometria* = földmérés). Kezdetben a mértan alatt földmérést értettek.

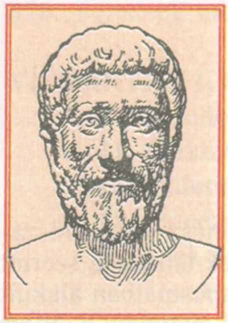
Később a mértan tartalmilag kibővült. Szükség lett olyan emberekre, akik nem csupán a földrészlegek méréséhez értettek. Az építőknek érteniük kellett a derékszög és az egyenes vonal kitűzéséhez, tudniuk kellett körvonalakat rajzolni. A tengerészeknek a csillagos ég alapján való tájékozódás céljából gyakran kellett szögeket mérni. E célból még jóval időszámításunk előtt megalkották az asztrolábium nevű műszert.

Eleinte a mértani alakzatok tulajdonságait kísérlettel, gyakorlati úton határozták meg. Csak az időszámításunk előtti első évezredben kezdték a mértani alakzatok tulajdonságait tételként bizonyítani.

A mértan mint tudomány egyik első megteremtője **Thalész** ógörög tudós (i. e. VI. sz.). Szokták őt még a görög matematika atyjának is nevezni. Bebizonyította a csúcsszögek egyenlőségének tételét. Ő állapította meg, hogy az egyenlő szárú háromszögben a szárakkal szemben egyenlő szögek vannak. Thalész ismerte a háromszögek egybevágóságának második esetét, az egyenlő szárú derékszögű háromszög tulajdonságait. Ez utóbbi tulajdonság ismeretében kiszámította az egyiptomi piramisok magasságát. Azt is ő mondta ki, hogy a kört az átmérő két részre osztja, és végül a róla elnevezett Thalész-tételt. Asztrolábium segítségével Thalész megjósolta az időszámításunk előtt 585. május 28-án bekövetkezett napfogyatkozást.



Thalész



Pitagorasz

Eukleidész

Pitagorasz (i. e. VI. sz.) – ógörög filozófus és matematikus. Tanítványaival vizsgálta a számok, a mértani alakzatok, az égitestek tulajdonságait. Iskolájában felfedeztek és bebizonyítottak néhány mértani tételt, többek között azt, hogy minden derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével. Napjainkban Pitagorasz tételének közel száz bizonyítása ismert.

A mértan, mint tudomány az ókori Görögországban alakult ki, amikor a kezdetben csak tapasztalati úton megtalált mértani törvényszerűségek és összefüggések rendszerbe lettek foglalva. Az egyik ilyen matematikai mű, mely napjainkig fennmaradt, az ókori görög matematikus, **Eukleidész** (i. e. III. sz.) *Elemek* című munkája. Ez az alkotás 13 könyvből áll, közülük az első hat a planimetriával foglalkozik. Eukleidész munkája nem csupán gazdag tartalma, hanem a tárgyalás módszere miatt is érdekes. A könyvek elején találhatók a meghatározások és axiómák, és minden további állítását tantételként bizonyítja.

Eukleidész nem egyedül fedezte fel és bizonyította be a könyvben szereplő tantételeket. A könyv tartalmazza más szerzők felfedezéseit, elméleteit. Eukleidésznek annyira sikerült rendszerezni az általa ismert matematikai tudást, hogy *Elemek* című munkája 2000 éven át matematikai alaptankönyvként szolgált. A művet nem az eredetiség, nem a matematikai alkotás tette halhatatlanná, hanem a korát meghaladóan kifinomult deduktív módszer.

Érdekes adat Eukleidész életrajzából. Egy alkalommal I. Ptolemaiosz megkérdezte a matematikust, hogy a geometria megtanulásának nincs-e rövidebb és könnyebb módja, mint az, amelyet az elemek mutatnak, akkor a nagy geométer így válaszolt: „A geometriához nem vezet királyi út."

Eukleidész után sokat tettek a mértan fejlesztése terén **Arkhimédész**, **Apolloniosz** és más ókori görög matematikusok is.

A következő másfélezer év folyamán a mértan alig fejlődött Európában. Csak a reneszánsz időszakában kezdődött meg újjászületése.

Amikor a jobb parti Ukrajna Lengyelországhoz tartozott, az ukrán fiatalok, akik felsőbb iskolákban tanultak, a mértant Eukleidész *Elemek* című munkájának latin fordításából tanulták, majd később Sz. Gzsepszkij lengyel tankönyvéből, melyet 1565-ben nyomtattak Krakkóban. Címlapján ez volt olvasható: *„A geometria, azaz földmérő tudomány lengyelül röviden megírva görög és latin könyvek alapján. A könyvben megtalálod, hogyan mérték a szántóföldeket a mi földmérőink zsinórral, lánccal. Itt találod még, mennyi a juger (római területmérték, kb. 2500 m*^{2} (A fordító megjegy.)). *És még egy – hogyan mérhetsz meg egy tornyot vagy egyéb magasságot.”*

A Kijev-Mogiljanszki Akadémia diákjai nem mindig tanultak mértant, amikor tanultak, akkor is latinul. Megmaradt egy mértani előadásokat tartalmazó jegyzet, melyet Feofan Prokopovics neves filozófus és egyházi személyiség tartott az 1707–1708-as években. Ebben olvashatjuk: *„A geometria általános és speciális részre osztható. A speciális geometriát másként geodéziának nevezik.”* Geodéziai előadását Prokopovics így kezdi: *„A speciális geometria, melyet másként gyakorlati geometriának, néha geodéziának neveznek, az egyik legnemesebb, leghasznosabb és legérdekesebb ága a matematikának.”*

Azonban a későbbiekben a gyakorlati geometriára egyre kevesebb figyelmet fordítottak az iskolákban.

Különösen jelentős R. Descartes, L. Euler és Ny. I. Lobacsevszkij munkássága a geometria fejlődésében.

Már ismeritek Eukleidész axiómáját a párhuzamos egyenesekről. Több mint 2000 évig geométerek százai próbálkoztak bebizonyítani az állítást, melyet Eukleidész bizonyítás nélkül fogadott el. Sok időt elvesztegettek, sok papírt teleírtak, de a bizonyítás senkinek nem sikerült.


Ny. Lobacsevszkij

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792–1856) vetett véget a hiábavaló próbálkozásoknak. Rámutatott, hogy Eukleidész állítása nem bizonyítható be mint tantétel. Új geometriát alkotott, melyet *Lobacsevszkij-féle geometriának neveznek.* Amit Lobacsevszkij alkotott a mértanban, azt a szakemberek a Kopernikusz által a csillagászatban létrehozott forradalmi változásokhoz hasonlítják.

Lobacsevszkij Oroszországban született, családja volinyi származású.


Voronyij

Az ukrán matematikusok közül leginkább hozzájárultak a mértan fejlődéséhez H. F. Voronyij, M. J. Vascsenko-Zaharcsenko, O. Sz. Szmohorzsevszkij.

Heorhij Feodoszijovics Voronyij (1868–1908) a Csernyihivi terület Zsuravka községében született. A Pétervári és a Varsói Egyetem professzora volt. A sík és a tér egyenlő alakzatokkal való kitöltésének kérdését vizsgálta. A geometriai számelmélet megalkotójaként tartják számon.

Mihajlo Jehorovics Vascsenko-Zaharcsenko (1825–1912) a Poltavai terület Makijivka községében született. Kijevben és Párizsban tanult. Később a Kijevi Egyetem professzora volt. Kutatta a mértan fejlődésének történetét. Megjelentetett néhány mértani segédkönyvet, oroszra fordította Eukleidész *Elemek* című munkáját.

Olekszandr Sztepanovics Szmohorzsevszkij (1896–1969) a Vinnicai terület Liszove községében született. A Nemirovi és a Kijevi Egyetemen tanult, a Kijevi Műszaki Főiskola professzora volt. A mértani szerkesztésekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgálta. Kiadott néhány mértani segédkönyvet és tankönyvet, a geometria alapjai tankönyvet egyetemi hallgatók számára. Munkáit lefordították angol, bolgár, japán és más nyelvekre.

A mértan mint tudomány jelenleg is fejlődik, továbbra is szolgálja az emberiséget. A XX. század egyik leghíresebb építésze, Le Corbusier írta: „Soha ilyen geometriai korban nem éltünk. A bennünket körülvevő világ a geometria világa, a mi szemünkben tiszta, igazi, kifogástalan. Körülöttünk minden – geometria.”

Tárgymutató

Az idézetek szerzőiről

Leonardo da Vinci (1452–1519) – itáliai építész, szobrász, festőművész, feltaláló.

Spencer Herbert (1820–1903) – angol filozófus, szociológus, pszichológus.

Olekszandr Sztepanovics Szmohorzsevszkij (1896–1969) – ukrán matematikus.

Próklosz (410–485) – görög filozófus.

Rövid értelmező szótár

Átfogó – a derékszögű háromszög derékszöggel szemben fekvő oldala.
Átmérő – a körvonal középpontján átmenő húr.
Axióma – bizonyítás nélkül elfogadott állítás.
Befogó – a derékszögű háromszög hegyesszögével szemben fekvő oldal.
Bizonyítás – az állítás igazságának megalapozása.
Csúcsszögek – két szög, melynek szárait két egymást metsző egyenes alkotja.
Derékszögű háromszög – olyan háromszög, melynek egyik szöge derékszög.
Egyenes – meghatározatlan fogalom, melynek lényegét leírással vagy axiómákkal fejezzük ki.
Egyenlő alakzatok – olyan két mértani alakzat, melyek egymásra helyezve egybeesnek.
Egyenlő oldalú háromszög – olyan háromszög, melynek minden oldala egyenlő egymással.
Egyenlő szárú háromszög – olyan háromszög, melynek két oldala egyenlő egymással.
Érintő – a körvonallal egy síkban fekvő egyenes, melynek a körvonallal egy közös pontja van.
Félegyenes – az egyenes végtelen része, mely az adott egyenes egy pontjától egy oldalra fekszik.
Fok – az egyenesszög $\frac{1}{180}$-ad része.
Háromszög – három elemből álló zárt töröttvonal, vagy a síknak ilyen töröttvonallal határolt része.
Háromszög kerülete – a háromszög három oldalának összege.
Háromszög magassága – a háromszög csúcsából a szemközti oldalra vagy annak meghosszabbítására bocsátott merőleges.
Háromszög szögfelezője – a háromszög szöge felezőjének a háromszög belső tartományában fekvő része.

Húr – a körvonal két tetszőleges pontját összekötő szakasz.
Körlap – a síknak körvonallal határolt része.
Körvonal – a sík egy pontjától egyenlő távolságra fekvő összes pontok halmaza.
Mellékszögek – két szög, melyek egyik szára közös, két másik szára kiegészítő félegyenes.
Merőleges egyenesek – egymást derékszögben metsző egyenesek.
Mértan – a matematikának a mértani alakzatok tulajdonságaival foglalkozó ága.
Mértani alakzat – pontok tetszőleges halmaza.
Párhuzamos egyenesek – egy sík két egyenese, melyek nem metszik egymást.
Pont – meghatározatlan fogalom, melynek lényegét leírással, vagy axiómákkal fejezzük ki.
Pontok mértani helye – meghatározott feltételeket kielégítő összes pontok halmaza.
Sugár – a körvonal tetszőleges pontját a középponttal összekötő szakasz.
Súlyvonal – a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.
Szakasz – az egyenes része, amely két pontja között fekszik.
Szög – a síknak egy közös pontból kiinduló két félegyenes által határolt része.
Szögfelező – a szög belső félegyenese, mely két egyenlő részre osztja a szöget.
Tantétel – olyan állítás, melynek igazságát bizonyítani kell.
Távolság az *A* és *B* pont között – az *AB* szakasz hossza.

Megoldások és útmutatások

7. *AB*. **11.** Igen. **12.** Nem tartozik hozzá. **13.** *KP*, *PT*, *KT*, *PK*, *TP*, *TK*. **16.** 4. **19.** Lehet. **21.** 6. 16, 17 vagy 18 részre. **28.** 20,5 cm. **29.** 8 cm. **31.** 10 dm. **33.** 1) 2 cm; 6 dm; 20 km. **34.** 21 cm. **42.** Igen. **44.** a) 5,9 cm. **45.** a) 0,6 dm. **46.** 13 cm. **48.** 6 cm. **50.** a), b) Igen. **52.** 13 cm és 7 cm. **54.** 3 cm, 9 cm, 11 cm, 17 cm. **61.** 0,5 m. **65.** 30°. **70.** Nem. **73.** 2° 15′; 83°20′. **78.** 90°. **79.** Nem; lehet. **81.** 15°; 2,5°. **82.** 31° 15′. **83.** 90° vagy 30°. **84.** 180°; 60°. **85.** 20°. **86.** 4-szer. **87.** 45°. **89.** 70° és 40°. **102.** Nem. **104.** 130°. **105.** 20°. **106.** a) 146°; d) 44° 13′. **108.** a) 75° és 105°. **109.** b) 72° és 108°. **111.** 60°. **120.** c) 50°, 130°, 50°, 130°. **121.** 80°; 100°; 90°. **122.** a) 120°. **124.** 130°. **125.** a) 55°. **127.** Mint 1 : 8; mint 1 : 4. **140.** Helyes. **143.** 135° és 135°. **145.** (0; 6), (6; 0); (0; –4), (–4; 0). Igen. **150.** a) 50°. **161.** Nem. **162.** a) 60° és 120°; d) 108° és 72°. **163.** a) 0,1 *P*, 0,2 *P*, 0,3 *P*, 0,4 *P*. **172.** a) 90°, 90°, 80°, 100°, 90°, 80°. **173.** a) Igen. **174.** a) Igen. **175.** Igen. **176.** Igen. **177.** a) Igen. **180.** a) 90° és 90°; c) 120° és 60°. **181.** a) Igen. **182.** a) $a \parallel b \parallel c$; c) $a \parallel b \parallel c$. **185.** Igen. **198.** 145°, 35° és 145°. **199.** 50°, 130°. **206.** 40°. **209.** 180°. **210.** a) 65° és 115°. **216.** 50°, 70° és 60°. **217.** 86°. **218.** 71°. **220.** a) 6 cm; b) 7 cm. **222.** b) Egyik sem; egyet; sokat. **235.** c) Állítás. **238.** A kölcsönösen párhuzamos szárú szögek nem mindig egyenlők. **239.** a) Nem; b) nem. **242.** a) Állítás. **246.** a) Nem; b) nem; c) nem . **263.** 15,8 cm. **264.** 6 cm. **265.** 39 cm. **266.** Igen. **269.** a) 4 cm és 12 cm; b) 6 cm és 10 cm; c) 8 cm és 8 cm; d) 5 cm és 11 cm. **272.** 12 cm, 6 cm, 8 cm. **273.** 12 cm. **274.** 30 cm. **275.** Igen. **276.** Igen. **277.** 102 cm. **279.** 3 cm. **287.** 20 m. **288.** 50°. **294.** a) 36°, 54°, 90°; b) 15°, 75°, 90°; c) 54°, 54°, 72°. **297.** a) 50°, 50° és 80°; b) 80°, 60° és 40°; c) 76°, 38° és 66°. **298.** 130°. **299.** Nem. **301.** 60°, 40° és 80°. **302.** 75° vagy 15°. **303.** 15°. **304.** a) 70°; b) 60°. **305.** a) 60°, 30°; b) 60°, 30°. **306.** a) 140°, 130°, 90°; c) 130°, 130°, 100°. **308.** 180°. **309.** 270°. **310.** Nem. **312.** 0,5 *a*. **313.** 24 cm. **314.** 5 cm. **315.** 3 cm. **316.** 2 : 3. **327.** Nem. **329.** 12 cm. **330.** Igen. **331.** 70°; 3,8 cm. **332.** 60°, 60°, 60°.

333. Igen. **340.** Igen. Nem. **341.** 26 cm. **345.** 9π cm^2; 6π cm. **346.** $1{,}8\pi$ cm^2. **348.** 25π ha. **349.** 55°. **355.** 12 cm. **356.** Igen. **359.** Igen. **364.** Mert $CTP\triangle = CAB\triangle$. **366.** 8 cm. **369.** Legyen BM és B_1M_1 ABC és $A_1B_1C_1$ egybevágó háromszögek súlyvonalai. Bebizonyítani, hogy $ABM\triangle = A_1B_1M_1\triangle$. **375.** 40°, 80°. **376.** Igen. **377.** 90°. **386.** 67 cm. **387.** 2 cm. **388.** 50°. **389.** 120°. **390.** a) 50°, 50°, 80° vagy 40°, 70°, 70°; b) 36°, 72°, 72° vagy 90°, 45°, 45°. **393.** a) 25°; b) 75°; c) 40°. **394.** a) 10 cm, 20 cm és 20 cm; b) 15 cm, 15 cm és 20 cm. **395.** 30°. **398.** $A\angle$. **399.** 15 cm. **402.** 20 cm, 20 cm, 10 cm vagy 15 cm, 15 cm, 25 cm. **404.** a) 120°, 30°, 30°; b) 30°, 75°, 75° vagy 120°, 30°, 30°; c) 165°; 7,5°; 7,5°; d) 50°, 65°, 65°. **406.** $2a + b$. **407.** a) $2p - 2b$; b) $p - \frac{a}{2}$. **411.** Az AB egyenesre merőleges, annak középpontján átmenő egyenesen fekszik. **412.** 80°, 80°, 100°, 100°. **414.** 96°. **415.** a) 60° és 120°; b) 72° és 108°. **416.** 6 cm. **417.** 30 dm. **421.** Bebizonyítani az AOB, BOC és AOC háromszögek egybevágóságát. **429.** a) Először bizonyítsátok be, hogy $AOB\triangle = AOC\triangle$, majd bizonyítsátok az ABM és ACM háromszögek egybevágóságát; b) bizonyítsátok be az OBM és OCM háromszögek egybevágóságát. **431.** 1) Húzzátok meg a BD átlót, és bizonyítsátok be, hogy $ABD\triangle = CDB\triangle$. 2) Húzzátok meg az AC szakaszt, és bizonyítsátok be, $ACB\triangle = CAD\triangle$. **433.** a) Bizonyítsátok be az APB és CPB háromszögek egybevágóságát. **437.** 40°, 60°, 80°. **438.** 60°. **439.** 60 cm. **440.** $\frac{2}{3}p$. **441.** 90°. **446.** 40° és 50°. **448.** 30°, 60°, 90°. **450.** 40° és 50° **454.** $AC = BC$. **455.** $180° - \alpha$. **457.** 16 cm. **459.** a) 9 cm; b) 9 cm. **460.** a) 9,5 cm; b) 9,5 cm. **461.** 27 cm. **462.** 50° és 40°. **463.** Nem. **465.** Nem. **467.** 2 *m*. **468.** 5 cm. **470.** 70°, 80°, 30°. **471.** Nem. **472.** 36°, 54°, 90°. **477.** a) AC – legnagyobb, BC – legkisebb. **478.** $B\angle$ legnagyobb, $C\angle$– legkisebb. **479.** Nem; igen. **480.** Nem. **481.** Nem. **483.** Nem. **485.** Nem. **487.** Nem. **488.** 3 cm $< BC <$ 13 cm. **490.** 70 cm $< P <$ 126 cm. **491.** Igen. **492.** 75° és 105°. **493.** 80° és 80°. **498.** c) 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6; d) 0, 1, 2 vagy számtalan. **505.** a) 12 m; b) 2 m. **506.** Igen. **509.** 120°, 60°. **511.** Ha O a kör középpontja, akkor $ABO\triangle = CDO\triangle$ (a három oldal alapján). Az egybevágó háromszögekben a megfelelő magasságok egyenlők. **512.** a) Az adott körvonal O középpontjából húzzatok az adott egyenesre merőleges c egyenest. Ha a c egyenes a körvonalat A és B pontban metszi, húzzatok érintőket ezekbe a pontokba. **514.** 4 cm és 12 cm vagy 8 cm és 24 cm. **515.** Az AOB és AOC derékszögű háromszögek egyenlők. **516.** 5 cm. Mert a 30°-os szöggel szemben fekvő befogó egyenlő az átfogó felével. **517.** 90°. **518.** 60°. **519.** Az O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 oldalak mindegyike két egyenlő sugár összegével egyenlő. Ezért a $KPT\triangle$ egyenlő oldalú. **520.** 120°, ≈ 1,4 cm. **521.** $S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2) = \pi(r - r_1)(r + r_1) = mn(r + r_1) = ml$. **522.** $\frac{2}{3}a$. **523.** 5 cm. **524.** 12 cm. **525.** Vágjátok szét képletesen a négyzetet 4 egyenlő derékszögű háromszögre és rakjatok össze belőlük egy téglalapot. **527.** Igaz. **529.** Az adott egyenesekkel párhuzamos egyenes, mely tőlük egyenlő távolságra van. **530.** A BK egyenes, a BC egyenes. **531.** A CK egyenes. **532.** Igen, ha a C pont nem az AB szakasz középpontja. **533.** Igen. **537.** A két egyenes párhuzamos az adott egyenessel. **540.** Az adott egyenessel párhuzamos, tőle egyenlő távolságra levő két egyenes. **541.** Körvonal. **543.** a) Az adott körvonal és a vele koncentrikus $3r$ sugarú körvonal. **544.** Az adott körvonallal koncentrikus körvonal; átmérője az adott körvonal átmérőjének harmadrésze. **545.** Az adott körvonallal koncentrikus körvonal. **547.** Az adott egyenessel párhuzamos 4 egyenes. **548.** 4 pont. **551.** 135°. **557.** 0, 1 vagy számtalan. **559.** 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6. **561.** Nem. 8 cm kerülettel lehet. **564.** 30°, 30° és 120°. **567.** A körvonal hossza nagyobb. **569.** Nem. **572.** 120°. **574.** 30°, 30° és 120°. **575.** 5 cm. **576.** 12,5 m. **577.** Legyen O az ABC háromszögbe írt körvonal középpontja. Az OAB, OBC és OCA háromszögek egybevágók, egyenlőszárúak, mivel az alapon fekvő szögeik 30°-osak. Tehát $OA = OB = OC$ – a körülírt kör sugarai. Ha a beírt körvonal érintési pontja az AB-vel H, akkor $OH = 0{,}5OB$, mint a 30°-os szöggel szemben fekvő befogó. **578.** A körvonal érintési pontjai a szög száraival egyenlő távolságra vannak a szög csúcsától. **579.** 1. **580.** $2(c + r)$. **581.** 34 cm. **582.** 4 cm. **583.** A derékszög csúcsából húzott súlyvonal. **590.** Húzzátok meg az adott szög felezőjét, és a felének a felezőjét. **595.** Az adott szakasz mindkét végpontjából mérjetek fel egyenlő szakaszt, majd a középsőt felezzétek meg. **600.** Szerkesszetek háromszöget a három adott egyenlő szakasz alapján. **611.** A PM metsző egyenes az adott és a megszerkesztett egyenessel egyenlő, különböző szárú belső szögeket alkot. **612.** Ha az adott szög nem derékszög, akkor a feladatnak két megoldása van. **613.** 60°. **614.** Az ABC háromszög derékszögű és egyenlő szárú, ezért a $BAC\angle = BCA\angle = 45°$. **615.** A háromszög tompaszögű. **616.** 60°. **618.** Szerkesszetek derékszöget; egyik szárára a szög csúcsától mérjétek rá az alap felét, a másik szárra a magasságot.

619.1) Először szerkesszétek meg az adott szöget, majd a csúcstól a szárra mérjetek rá az átfogóval egyenlő szakaszt. Szerkesszetek körvonalat, melynek átmérője ez a szakasz. **620**. Szerkesszetek kisegítő háromszöget a három ismert szakasz, a súlyvonal, az adott oldal és a másik oldal fele alapján. **621**. 1) Rajzoljatok két párhuzamos egyenest, melyek között a távolság az adott magassággal egyenlő, az egyikre mérjétek rá az adott oldalak egyikét. A feladatnak 0, 1 vagy 2 megoldása lehet. **623**. Alkalmazzátok a pontok mértani helyének módszerét. Ha az adott egyenesek nem párhuzamosak, akkor a feladatnak 2 megoldása van. **624**. Szerkesszétek meg a szakasz felező merőlegesét, melynek végpontjai az adott pontok. **625**. A szög szárán adott ponton át húzzatok az erre az oldalra merőleges egyenest. Ez az egyenes a szög felezőjét abban a pontban metszi, mely az általunk szerkeszteni kívánt körvonal középpontja. **626. A** háromszög átfogója kétszer hosszabb a körvonal adott sugaránál. **627**. Először rajzoljátok meg az adott sugarú körvonalat, majd egy tetszőleges pontjából a két adott hosszúságú húrt. A feladatnak 0, 1 vagy 2 megoldása lehet. **628**. Először rajzoljátok meg az adott sugarú körvonalat, majd benne az adott hosszúságú húrt. **629**. Rajzoljátok meg az adott sugarú körvonalat, majd a háromszög adott alapjával egyenlő húrt. Ennek a húrnak a felező merőlegese a körvonalat olyan pontokban metszi, amelyek a megszerkeszteni kívánt háromszög csúcsai. **630.** Rajzoljátok meg az adott sugarú körvonalat, majd benne az átmérőt. Az átmérő végpontjában szerkesszétek meg az adott hegyesszöget. **631.** Rajzoljatok a megadott két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra fekvő egyenest. Az adott *A* pontból, mint középpontból rajzoljatok ívet az egyenesek közötti távolság felével egyenlő sugárral. A feladatnak két megoldása van. **632.** Rajzoljatok körvonalat az adott sugárral, majd benne az $AB = BC = DE = EF = r$ húrokat. Az OAB, OBC, OEF háromszögek egybevágók, egyenlő oldalúak, mindegyik szögük 60°-os. Ezért az $FOA\angle = 60°$és az $OFA\triangle$ ugyancsak egyenlő oldalú. Tehát az $ACE\triangle$ lesz az, amelyiket meg kellett szerkeszteni. *Második módszer.* Szerkesszetek AOC háromszöget $OA = OC = r$ adott oldalakkal és $AOC\angle = 120°$. Az AC a megszerkeszteni kívánt egyenlő oldalú háromszög oldala. **634**. Az adott AB átfogóra, mint átmérőre rajzoljatok félkört. Keressétek meg az AB egyenestől az adott magassággal egyenlő távolságra fekvő egyenesnek a félkörrel való metszéspontjait. **635**. Ha adott az *a* befogó és a vele szemben fekvő szög, akkor megszerkeszthető a háromszög az adott oldal és a rajta fekvő 90° és $90° - A\angle$

alapján. **636**. Rajzoljatok a derékszögbe adott sugarú körvonalat, mérjétek rá a derékszög egyik szárára az adott befogót, majd annak végpontjából szerkesszetek érintőt a körvonalhoz. **639**. Az átfogó és befogó alapján szerkesszetek kisegítő *CHM* derékszögű háromszöget, melyben *CH* – magasság, *CM* – súlyvonal. A *HM* egyenesre mérjétek rá az $MA = MB = MC$ szakaszokat. *ACB* a keresett háromszög. **651**. a), b) 6 rész; c) 7 rész. **652.** a) 12 cm; b) 20 cm; c) 12,5 cm; d) 7,5 cm. **653.** 2 cm és 6 cm vagy 4 cm és 12 cm. **654.** 4 eset: 1 cm, 5 cm, 9 cm, 12 cm. **655.** 1 : 4; 1 : 2; 2 : 1. **656.** a) 8 cm; b) 12 cm; c) 16 cm. **657.** 5 cm. **658.** a) 4 cm; b) 6 cm; c) 10 cm. **659.** $AC = 13{,}5$ cm, $BC = 1{,}5$ cm vagy $AC = 1{,}5$ cm, $BC = 13{,}5$ cm. **660.** $AB = 2$ cm; $AC = 8$ cm vagy $AC = 2$ cm, $AB = 8$ cm. **662.** Nem. **664.** a) 20° és 60°; b) 30° és 50°; c) 20° és 60°; d) 40° és 40°. **665.** 10°, 30°, 50°. **666.** 80°. **667.** 50° vagy 30°. **668.** 20°, 160°. **669.** 72°, 108°. **673.** a) 130°; b) 80°, c) 144°; d) 108°; e) 105°. **674.** 35° 25′; 144° 35′; 144° 35′. **675.** 60°; 120°; 60°; 120°. **676.** 90°; 180°. **678.** 110°; 70°. **680.** 144°; 36°; 144°; 36°. **681.** 20°; 160°; 20°; 160°. **684.** 4 cm. **686.** a) Nem; b) igen; c) nem; d) igen. **687.** a) Igen; b) igen; c) igen. **688.** a) Igen; b) nem; c) igen. **689.** a) $c \parallel d$; b) $a \parallel b$; c) $c \parallel d$; d) $c \parallel d$; e) $a \parallel b$. **692.** a) Igen; b) igen. **693.** a) $a \parallel c$; b) $a \parallel b$; c) $b \parallel c$; d) $a \parallel b \parallel c$. **695.** a) 70°; b) 75°; c) 80°; d) 67° 30′. **697.** 80°. **698.** 50°; 50°. **699.** a) Igen; b) igen; c) nem. **709.** 23 cm. **710.** Nem. **711.** 2 cm, 3 cm vagy 4 cm. **712.** a) 7 cm; b) 13 cm. **713.** a) 6 cm és 10 cm; b) 24 cm és 40 cm. **714.** 15°. **715.** 40° és 20°. **717.** 25°, 75°, 80°. **718.** 30°, 60°, 90°. **719.** 25°, 65°. **722.** 40°. **723.** 75°; 30°. **725.** 2 cm és 10 cm. **726.** 150°. **728.** 7 cm, 8 cm, 6 cm. **729.** Nem. **730.** a) Nem; b) igen. **731**. Igen. **732.** Nem. **745.** 50°, 50°, 80° vagy 80°, 80°, 20°. **746.** 5 cm, 8 cm, 8 cm vagy 6 cm, 6 cm, 9 cm. **748.** a) 40°; b) 80°. **749.** 20 cm. **752.** 36°, 72°, 72°. **753.** 60°, 60°, 60°. **764.** 18° és 72°. **767.** 5 cm, 12 cm, 13 cm. **770.** 3 cm és 9 cm. **771**. 7,5 cm. **772.** 2 cm. **773.** 5 cm. **774.** 5 cm. **777.** A $C\angle$ a legkisebb, a $B\angle$ a legnagyobb. **780.** $A\angle > C\angle$. **781.** 6 cm. **782.** 59 cm és 59 cm. **783.** 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm, 12 cm. **784.** 4,4 cm. **785.** Nem. **786.** 4 cm. **787.** 60°. **788.** $\frac{1}{2}r$. **790.** *AB*. **793.** 5 cm és 7 cm. **794.** 4 cm és 12 cm. **795.** 4 cm, 6 cm, 8 cm. **797.** 21 cm. **798.** 3 cm. **799.** 6 cm és 15 cm. **800.** 5 cm. **805.** A kapott szögek felezői. **807.** Az *O* középpontú, $2r$ sugarú körvonal. **808.** a) Az *O* középpontú, 13 cm sugarú körvonal; b) az *O* középpontú, 7 cm sugarú körvonal. **810.** 5 cm. **811.** 7,5 cm és 3 cm.

812. 46 cm. **813.** 12 cm, 15 cm, 17 cm. **814.** 9 cm és 18 cm. **815.** 4 cm és 6 cm. **816.** 8 cm. **819.** 12 cm. **820.** 6 cm. **848.** a) 149 100 ezer km; b) 149 900 ezer km. **850.** X – a CB szakasz középpontja. **851**. 108° és 72°. **852.** 120°. **853.** 180°. **854.** Ha a BX félegyenes az AC-t a K pontban metszi, akkor $AXK\angle > ABK\angle$ és $CXK\angle > CBK\angle$. **855.** Osszátok fel az adott szöget 4 egyenlő részre és szerkesszetek hozzá egy ilyen részt az adott szöghöz. **856.** Nem tudnak. Ha az ABC háromszög AH és CE magasságai az O pontban metszik egymást, akkor $AOE\triangle = COH\triangle, AO = OE$, ami lehetetlen. **857.** $\frac{1}{2}(a + b + c)$. **859.** Bármely háromszög szétvágható két derékszögű háromszögre, és az átfogóra húzott súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre osztja azokat. **860.** Be kell bizonyítani, hogy az AOC és BOD háromszögek egyenlő szárúak és egybevágók. **861**. Legyen $ABB_1\angle = B_1BC\angle = \alpha$. Be kell bizonyítani, hogy az AB_1B és BB_1C szögek mindegyike nagyobb, mint α. E célból a B csúcson át húzzunk az AC-vel párhuzamos egyenest. **862.** Legyen az ABC egyenlő szárú háromszög alapján egy M pont. Húzzátok meg az $MD \parallel AB$ szakaszt. $D \in BC$, és bizonyítsátok be, hogy $MD = DC$. **863.** 70°. Jelöljetek meg az ABC háromszög belső tartományában egy K pontot úgy, hogy $AK = KC = AC$. Akkor $BMC\triangle = AKB\triangle$, $BCM\angle = 10°$. **866.** 90°, 30° és 60°. Legyen CH, CM az ABC háromszög magassága és súlyvonala. $ACH\angle = HCM\angle = MCB\angle = \alpha$, a CM egyenes pedig metszi a körülírt körvonalat a K pontban. Akkor $CKB\angle = CAB\angle$ és $CBK\angle = CHA\angle = 90°$. CK a körülírt körvonal átmérője, és mivel $AM = MB$, ezért az AB is átmérő. **867.** Ezek a szögek: $90° + 0{,}5A\angle$, $90° + 0{,}5B\angle$, $90° + 0{,}5C\angle$. **869.** 15° és 75°. **871**. $a + b - c$. **872.** 1) Legyen ABC a megszerkesztendő háromszög, és K az AB átfogó egy olyan pontja, hogy $AK = AC$. A CB és KB szakaszok adottak. Az AC félegyenesre mérjétek rá a $CB_1 = KB$. Az ACK és AB_1B háromszögek egyenlő szárúak. Szerkesszétek meg a CBB_1 háromszöget, és rajzoljátok meg a BB_1 szakasz felező merőlegesét. **874.** Legyen ABC a háromszög, melyet meg kell szerkeszteni, és AB oldalán egy olyan K pont, hogy $AK = AC$. Határozzátok meg a CKB szöget és szerkesszétek meg a BKC háromszöget, majd a CK szakasz felező merőlegesét. **875.** Legyen az ABC háromszögben a C szög tompaszög, és az AB oldalon egy olyan K pont, hogy $AK = CB$. A CK lesz az az egyenes, melyet meg kellett húzni. **877.** Szerkesszetek először háromszöget az adott szakasz és a rajta fekvő két szög fele alapján. Majd húzzátok meg a megszerkesztett háromszög két oldalának felező merőlegesét.

TARTALOMJEGYZÉK

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української

Перекладачі: *Юдіт Імріївна Кулін*
Олександр Павлович Генці
Адальберт Адальбертович Варга

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Художнє оформлення *О. В. Коваль*
Коректор *І. О. Петро*

Підп. до друку 23.11.07. Формат 60×90/16. Папір офс. Гарнітура Таймс. Друк офс. Умовн, друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 14,25. Тираж 2370 пр. Свідоцтво держ. реєстру: ДК № 2980. Вид. № 24. Зам. № 141П.

Державне підприємство
"Всеукраїнське спеціалізоване видавництво "Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк ВАТ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
e-mail: patent@uzh.ukrtel.net